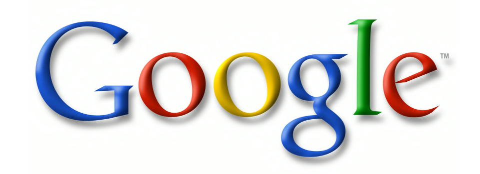
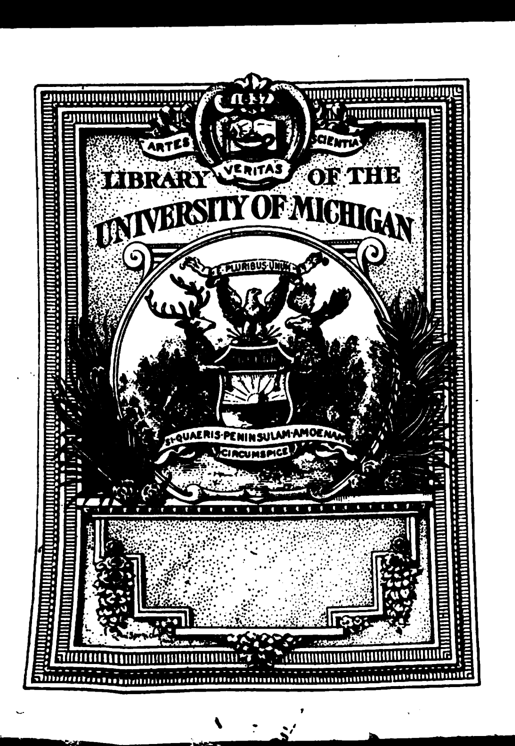



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

5/84 [illegible]

Octave DOIN, éditeur, 8, place de l'Odéon, Paris.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr Toulouse

BIBLIOTHÈQUE

DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : **M. D'OCAGNE**

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'École des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Le terme de mathématiques appliquées est par lui-même assez vague. Étendu à toutes les branches de la science qui font appel à l'emploi des mathématiques, il engloberait un domaine immense dans lequel viendraient se fondre nombre d'autres sections de l'Encyclopédie. Dans le plan général de celle-ci, il est réservé aux seules catégories suivantes :

1° *Science du calcul ;*

2° *Analyse appliquée à la science de la valeur ;*

3° *Géométrie appliquée à la détermination des positions et à la représentation des figures terrestres.*

I. — L'exécution des *calculs numériques* joue, dans un très grand nombre de techniques, un rôle aujourd'hui primordial. On doit s'efforcer de la rendre aussi rapide et aisée que possible, en l'appropriant exactement au degré d'approximation que l'on recherche, et en écartant, autant que faire se peut, les chances d'erreurs. L'étude des méthodes à suivre à cet effet, formant une sorte de prolongement des mathématiques pures, mérite d'être considérée comme une science à part, celle du calcul proprement dit, dont les principes sont de la plus haute utilité pour tous ceux qui, dans un ordre d'application quelconque, ont à exécuter sur des nombres des opérations plus ou moins compliquées.

L'effort du calculateur a pu d'ailleurs être largement soulagé grâce à l'intervention de procédés soit *graphiques*, soit *mécaniques*, de formes très diverses. Ces différents modes de calcul constituent aujourd'hui, à côté des méthodes purement numériques, des disciplines autonomes comportant des exposés d'ensemble spéciaux que l'on trouvera dans la première section de cette bibliothèque.

II. — La *science de la valeur*, sous ses divers aspects, repose essentiellement sur les notions de nombre et de fonction ; elle peut donc apparaître comme une application directe de l'analyse mathématique.

La pratique des opérations monétaires, toutes les combinaisons du prêt à intérêt, ont donné naissance à l'*arithmétique des changes* et à l'*algèbre financière*, dont l'exposé fournit la matière d'un premier volume.

Le calcul des probabilités a introduit dans les rapports économiques un nouvel élément de précision et fourni une base scientifique à l'industrie des assurances, dont les résultats restent la meilleure preuve de sa valeur pratique. L'étude spéciale des probabilités relatives à tous les sinistres susceptibles d'assurance, la combinaison de ces probabilités avec le jeu de la capitalisation, les moyens de calcul aptes à définir pratiquement les primes et réserves de tous les contrats, constituent la *théorie mathématique des assurances*, fondement de l'actuariat, à laquelle un second volume est consacré.

En dehors de ces applications pratiques déjà classiques, des tentatives nouvelles se sont produites pour emprunter à l'analyse mathématique toutes les rigueurs de notation et de raisonnement permettant de soumettre l'ensemble même des manifestations de la vie économique à une étude vraiment scientifique. Un mouvement s'affirme qui, rompant avec le verbalisme incertain des écoles et des doctrines, toujours dominé par les préoccupations pratiques, entend rester exclusivement théorique et constituer, — comme cela a été fait en physique, — une économique mathématique ou rationnelle et une économique expérimentale destinées à se contrôler, à se rejoindre même sur certains points lorsque la tâche sera suffisamment avancée.

La première abstrait des réalités économiques des types définis et des mécanismes simplifiés dont elle s'efforce de poser les conditions d'équilibre et de mouvement, en tendant à les ramener aux équations de Lagrange qui se trouveraient ainsi dominer un jour la mécanique des intérêts comme celle des forces. La seconde, ne pouvant recourir à l'expérience proprement dite, s'applique à perfectionner l'observation statistique, à en grouper les résultats, à en éliminer par l'interpolation les influences secondes. Elle soumet à des règles rationnelles les moyens de rechercher, de contrôler, de démontrer les corrélations entre les phénomènes ainsi rendus comparables. Deux volumes exposeront l'état actuel et les perspectives de cette double science en formation : l'*Économique rationnelle*, d'une part; la *Statistique mathématique*, de l'autre,

L'ensemble des volumes groupés dans la seconde section de cette bibliothèque se trouve ainsi constituer un exposé complet de ce qu'on appelle parfois la *chrématistique*.

III. — En vertu de ses origines mêmes, la géométrie est avant tout la science de la mesure des objets terrestres et de la détermination de leur forme. Par suite d'une évolution toute naturelle, elle est devenue, par le fait, la science générale des propriétés de l'espace. Il n'en est pas moins vrai que l'on doit, parmi ses applications, faire une place à part à celles qui visent son objet primitif, en les groupant en un seul tout, alors même que, pour plusieurs d'entre elles, il est fait appel, dans une certaine mesure, à des notions empruntées à d'autres sciences comme l'astronomie et la physique.

Au premier rang des objets terrestres, dont la mesure utilise les méthodes de la géométrie, s'offre la terre elle-même, dont la *géodésie* définit la figure d'ensemble tandis que la *topographie* fait connaître les détails de sa surface.

La *géodésie* peut d'ailleurs se subdiviser en trois branches principales correspondant à des études de plus en plus élevées :

1° La *géodésie élémentaire* qui, partant de l'hypothèse de la terre sphérique, applique à ses résultats des termes correctifs pour le passage à l'ellipsoïde, et qui comprend tout ce qu'exigent les observations et les calculs relatifs aux

triangulations exécutées en vue des opérations topographiques ;

2° La *géodésie sphéroïdique,* reposant, comme son nom l'indique, sur la considération du sphéroïde et qui comprend tout ce qui concerne les triangulations primordiales ;

3° La *géodésie supérieure,* consacrée à l'étude de l'exacte figure de la terre.

A chacune d'elles correspond un volume spécial. En raison du rôle capital qu'en ces matières joue la théorie des erreurs, celle-ci, dont les éléments sont exposés dans le premier de ces trois volumes, reçoit, dans le second, tout le développement susceptible d'intéresser les géodésiens.

La détermination des positions absolues sur la terre ferme, que réclame la géodésie, fait l'objet de l'*astronomie géodésique* que, en raison de leur étroite affinité, on ne saurait séparer de la *navigation;* l'une et l'autre de ces sciences d'application reposent d'ailleurs, en réalité, sur des opérations purement géométriques auxquelles l'astronomie ne fournit que des points de repère.

Il a paru également à propos de rapprocher de la géodésie et de la topographie (dont la *métrophotographie* n'est qu'une branche spéciale) diverses sciences connexes comme la *métrologie* qui détermine les étalons de mesure utilisés par la géodésie, la *cartographie* qui a pour objet la représentation des résultats fournis par la topographie...

Quant à la représentation des objets de petites dimensions, elle résulte de la mise en œuvre de divers systèmes de projection, au premier rang desquels ceux des projections orthogonales (*géométrie descriptive*) et des projections centrales (*perspective*).

Grâce à la *métrophotographie,* les lois de la perspective sont, en outre, très heureusement utilisées et le seront de jour en jour davantage en vue des levers topographiques.

Les volumes seront publiés dans le format in-18 jésus cartonné ; ils formeront chacun 400 pages environ avec ou sans figures dans le texte. Le prix marqué de chacun d'eux, quel que soit le nombre de pages, est fixé à 5 francs. Chaque volume se vendra séparément.

Voir, à la fin du volume, la notice sur l'ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE, pour les conditions générales de publication.

TABLE DES VOLUMES
ET LISTE DES COLLABORATEURS

*Les volumes parus sont indiqués par un *.*

A. — Science du calcul.

1. — **Calcul numérique**, par R. de Montessus et R. d'Adhémar, docteurs ès sciences mathématiques.

* 2. — **Calcul graphique et Nomographie**, par M. d'Ocagne, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'Ecole polytechnique.

3. — **Calcul mécanique.**

B. — Analyse appliquée.

* 1. — **Théorie et pratique des opérations financières**, par A. Barriol, ancien élève de l'Ecole polytechnique, membre de l'Institut des actuaires français, directeur de l'Institut des finances et assurances.

* 2. — **Théorie mathématique des assurances**, par P.-J. Richard et Em. Petit, anciens élèves de l'Ecole polytechnique, actuaires.

3. — **Économique rationnelle**, par A. Aupetit, docteur en droit, membre de l'Institut des actuaires français.

* 4. — **Statistique mathématique**, par H. Laurent, docteur ès sciences, membre de l'Institut des actuaires français, répétiteur à l'Ecole polytechnique.

C. — Géométrie appliquée.

1. — **Métrologie**, par R. Benoit, directeur du Bureau international des poids et mesures, correspondant de l'Institut et du Bureau des longitudes.

2. — **Astronomie géodésique**, par Driencourt, ingénieur hydrographe en chef de la Marine.

3. — **Navigation**, par E. Perret, lieutenant de vaisseau, professeur à l'Ecole navale.

4. — **Géodésie élémentaire**, par R. Bourgeois, lieutenant-colonel d'artillerie, chef de la section de géodésie au service géographique de l'armée, membre correspondant du Bureau des longitudes.

NOTA. — La collaboration des auteurs appartenant aux armées de terre et de mer, ou à certaines administrations de l'Etat, ne sera définitivement acquise que moyennant l'approbation émanant du ministère compétent.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université.

BIBLIOTHÈQUE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées
Répétiteur à l'École polytechnique.

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES ASSURANCES

THÉORIE MATHÉMATIQUE

DES ASSURANCES

PAR

P.-J. RICHARD ET ÉMILE PETIT

ANCIENS ÉLÈVES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ACTUAIRES

PARIS

OCTAVE DOIN, ÉDITEUR

8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1908

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DES ASSURANCES

INTRODUCTION

A. — RAPPEL DES PRINCIPES FONDAMENTAUX DU CALCUL DES PROBABILITÉS

La théorie des assurances étant basée sur le calcul des probabilités, nous rappellerons, dans ce qui va suivre, les éléments dont la connaissance est indispensable pour la bonne compréhension de l'ouvrage.

Définition de la probabilité mathématique. — On appelle probabilité d'un événement, le rapport du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement au nombre de tous les cas possibles, tous les cas étant supposés également possibles.

Ainsi, considérons une urne renfermant B boules blanches et N boules noires, et supposons qu'on tire au hasard une boule. Il y a $B+N$ cas également possibles, parmi lesquels B sont favorables. Nous dirons que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{B}{B+N}$.

Exemple I. — Si v_x désigne le nombre des personnes vivantes à un âge x, quelle est la probabilité pour l'une d'elles d'atteindre l'âge $x+n$?

Supposons que parmi ces v_x personnes, v_{x+n} doivent atteindre l'âge $x+n$; on voit aisément que la probabilité cherchée est $\frac{v_{x+n}}{v_x}$.

Remarque. — Dans l'exemple que nous venons de donner, nous avons supposé tous les cas également possibles. C'est là évidemment une supposition invraisemblable; le hasard n'intervient pas seul dans la mortalité, et un médecin examinant un groupe de personnes pourra, sans trop se tromper, désigner celles qui mourront les premières.

Dans la pratique, la sélection exercée soit par les compagnies d'assurances, soit par les assurés eux-mêmes, en éliminant les cas anormaux, justifie l'application du calcul des probabilités à la théorie des assurances.

Exemple II. — Quelle est la probabilité pour qu'une personne d'âge x meure entre les âges $x+n$ et $x+n+n'$?

Supposons que sur v_x personnes vivantes à l'âge x il en reste v_{x+n} à l'âge $x+n$, et $v_{x+n+n'}$ à l'âge $x+n+n'$. Le nombre de morts entre les âges $x+n$ et $x+n+n'$ est :

$$v_{x+n}-v_{x+n+n'}$$

et par suite la probabilité cherchée est :

$$\frac{v_{x+n}-v_{x+n+n'}}{v_x}.$$

Probabilité totale. — Supposons qu'une urne contienne 40 boules : 10 blanches, 10 rouges, 10 bleues, 10 vertes. Quelle est la probabilité de tirer une boule de couleur en un tirage?

L'événement favorable peut se produire de trois façons différentes : soit par le tirage d'une rouge, soit par celui d'une bleue, soit par celui d'une verte; les probabilités respectives de ces tirages sont : $\frac{10}{40}$, $\frac{10}{40}$, $\frac{10}{40}$. Les numérateurs des fractions représentant les nombres de cas favorables, leur somme sera le nombre total de cas favorables. On voit aisément que la probabilité totale du tirage d'une boule de couleur quelconque est la somme des probabilités de tirage d'une boule de couleur déterminée.

D'une façon générale, si un événement E peut se produire par l'arrivée d'événements l_1, l_2, ... l_n nettement différents, la probabilité de l'événement E est la somme des probabilités respectives des événements l_1, l_2, ... l_n.

Probabilité composée. — Un événement composé résulte du concours de plusieurs événements simples, successifs ou simultanés. Supposons d'abord les événements simples indépendants les uns des autres.

Théorème. — La probabilité d'un événement composé est égale au produit des probabilités des événements simples composants, ces événements étant supposés indépendants les uns des autres.

Soit N le nombre total de cas possibles ; μ_1, μ_2, ... μ_n les nombres de cas possibles relatifs aux événements composants ; m_1, m_2, ... m_n les nombres de cas favorables aux arrivées de ces événements; F le nombre de cas favorables à l'arrivée de l'événement composé. On a :

$$N = \mu_1\mu_2 \dots \mu_n,$$
$$F = m_1 m_2 \dots m_n.$$

La probabilité composée est :

$$\frac{F}{N} = \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_n} = \frac{m_1}{\mu_1} \times \frac{m_2}{\mu_2} \dots \times \frac{m_n}{\mu_n}.$$

Cette égalité démontre le théorème.

Exemple I. — Trois urnes contiennent respectivement 10 boules blanches et 10 boules noires, 10 blanches et 20 noires, 10 blanches et 30 noires. On prend une boule dans chaque urne. Quelle est la probabilité qu'on prenne trois boules blanches?

L'application du théorème précédent donne immédiatement la probabilité cherchée.

$$\frac{10}{20} \times \frac{10}{30} \times \frac{10}{40} = \frac{1}{24}.$$

Exemple II. — Si p_x^n désigne la probabilité qu'a une personne d'âge x de vivre dans n années et $p_{x+n}^{n'}$ la probabilité qu'a une personne d'âge $x+n$ de vivre n' années plus tard, quelle est la probabilité pour une personne d'âge x de vivre dans $n+n'$ années ?

Soit $p_x^{n+n'}$ la probabilité cherchée. L'application du théorème précédent donne :

$$p_x^{n+n'} = p_x^n \times p_{x+n}^{n'}.$$

Vérifions ce résultat. La définition même de la probabilité nous permet d'écrire :

$$p_x^n = \frac{v_{x+n}}{v_x}; \quad p_{x+n}^{n'} = \frac{v_{x+n+n'}}{v_{x+n}},$$

$$p_x^n \times p_{x+n}^{n'} = \frac{v_{x+n}}{v_x} \times \frac{v_{x+n+n'}}{v_{x+n}} = \frac{v_{x+n+n'}}{v_x} = p_x^{n+n'},$$

ce qui est conforme au résultat obtenu en appliquant le théorème de la probabilité composée.

Événements dépendants. — Si les événements composants dépendent les uns des autres, la probabilité composée est égale au produit des probabilités respectives des événements composants, chacune d'elles étant calculée en supposant les événements composants qui précèdent favorablement arrivés.

Exemple. — Une urne contient 10 boules blanches et 10 boules noires; on tire trois boules, quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches?

Après avoir enlevé une boule de l'urne, le nombre de cas possibles ou favorables est diminué d'une unité. La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{10 \times 9 \times 8}{20 \times 19 \times 18} = \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18}.$$

Théorème de Bernoulli. — Conséquences. — Le théorème de Bernoulli présente un intérêt considérable pour l'actuaire et le statisticien. Nous n'en donnerons pas ici la démonstration, — pour laquelle nous renvoyons le lecteur aux traités spéciaux; — mais nous rappellerons, outre son énoncé, les principes sur lesquels il s'appuie et les conséquences qui en découlent.

Théorème. — La probabilité d'un événement est p, celle de l'événement contraire est q; on fait N épreuves dans les mêmes conditions; les nombres les plus probables d'arrivées des deux événements sont proportionnels aux probabilités p et q.

Exemples. — On fait 100 épreuves à pile ou face; les nombres les plus probables d'arrivées de pile et de face sont 50 et 50.

On lance un dé 600 fois; la probabilité d'amener un as en un coup est $\frac{1}{6}$; pour les 600 épreuves le nombre le plus probable d'arrivées de l'as sera donc 100.

Remarque. — Si μ est le nombre total d'épreuves et p la probabilité d'un événement, le nombre le plus probable d'arrivées de l'événement considéré est μp. En effet, si q est la probabilité de l'événement contraire, x et y les nombres les plus probables d'arrivées, le théorème précédent nous permet d'écrire :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{x+y}{p+q} = \frac{\mu}{1};$$

d'où

$$x = \mu p; \quad y = \mu q.$$

Des écarts. — Supposons qu'après μ épreuves un événement se soit produit N fois; μp étant la valeur la plus probable du nombre d'arrivées de l'événement, nous appellerons *écart*[1] la différence :

$$N - \mu p.$$

[1] La définition de l'écart telle que nous l'avons donnée n'est pas celle qu'ont adoptée les joueurs. Dans la pratique du jeu, on

Ainsi, sur 100 épreuves de pile ou face, on amène 53 fois pile; la valeur probable étant 50, l'écart sera de 3 unités.

Remarquons que l'écart peut être positif ou négatif, suivant que le nombre d'arrivées est supérieur ou inférieur à la valeur la plus probable.

Théorème de Bernoulli. — Considérons deux événements contraires de probabilités respectives p et q; si l'on fait μ épreuves consécutives, la probabilité ϖ_α d'un écart compris entre α et $-\alpha$ est :

$$\varpi_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2}\, dt.$$

Dans cette relation, π et e représentent les valeurs bien connues : $\pi = 3,14159\ldots$

$$e = 2,71828\ldots$$

On a dressé une table des valeurs numériques de la fonction :

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt.$$

Cette fonction prend la valeur zéro pour la valeur zéro de la variable; elle tend très rapidement vers 1

appelle écart le nombre d'épreuves consécutives pendant lesquelles un événement ne s'est pas produit. Ainsi les journaux de courses disent que l'écart d'un jockey est 16 si ce jockey a pris part à 16 épreuves sans gagner une seule fois. Si ce jockey gagne en moyenne 1 course sur 4, il aurait dû sur les 16 épreuves en gagner 4. Par suite son écart, tel que nous l'avons défini, serait 4.

lorsque t augmente. Quelques valeurs de la fonction indiquent bien son allure :

$$\Theta(0) = 0{,}000.000.0$$
$$\Theta(0{,}1) = 0{,}112\ 463\ 0$$
$$\Theta(0{,}5) = 0{,}520\ 499\ 2$$
$$\Theta(1) = 0{,}842\ 700\ 8$$
$$\Theta(2) = 0{,}995\ 322\ 3$$
$$\Theta(3) = 0{,}999\ 977\ 9$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Theta(4{,}8) = 0{,}999\ 999\ 999\ 99.$$

La probabilité ϖ_α est représentée par le nombre :

$$\Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Conséquences. — De la relation:

$$t = \frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}},$$

dans laquelle α est la limite supérieure de l'écart et μ le nombre d'épreuves, nous pouvons tirer quelques conséquences très importantes :

1° Nous avons vu que l'écart zéro était le plus probable; cependant sa probabilité tend vers zéro quand le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.

2° La probabilité d'avoir un écart inférieur à une valeur α déterminée à l'avance, si grande soit-elle, tend vers zéro lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.

En effet, quelle que soit la valeur de α, nous pouvons choisir pour μ une valeur telle que t, et par suite $\Theta(t)$, ait une valeur aussi petite qu'on voudra. Par

suite, on voit que les écarts peuvent devenir très grands lorsque le nombre d'épreuves augmente.

3° Si l'on assigne à α une valeur proportionnelle au nombre d'épreuves μ, la probabilité d'avoir un écart inférieur à cette valeur tend vers 1 quand μ croît indéfiniment.

Posons : $$\alpha = k\mu.$$

On a : $$t = \frac{k\mu}{\sqrt{2\mu pq}} = \frac{k}{\sqrt{2pq}} \cdot \sqrt{\mu}.$$

Si μ augmente indéfiniment, t croît aussi indéfiniment, et par suite la fonction $\Theta(t)$ tend vers 1.

On peut donc dire que :

1° Les écarts croissent indéfiniment avec le nombre d'épreuves ;

2° Le rapport de l'écart au nombre d'épreuves tend vers zéro quand le nombre d'épreuves augmente indéfiniment.

Théorème réciproque. — **Recherche de la probabilité par l'expérience**. — Nous venons de voir qu'en faisant un nombre suffisant d'épreuves, la probabilité d'avoir un écart plus petit qu'une valeur $k\mu$ proportionnelle au nombre d'épreuves était aussi voisine de l'unité qu'on le voulait. Supposons que l'événement considéré se soit produit N fois. Posons :

$$N = \mu p + \alpha.$$

Considérons le rapport $\frac{\mu p + \alpha}{\mu}$; ce rapport diffère très peu de la probabilité p, la différence est $\frac{\alpha}{\mu}$.

Comme ce rapport $\frac{\alpha}{\mu}$ décroît en tendant vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, on voit que le rapport $\frac{N}{\mu}$ a pour limite la valeur p de la probabilité lorsque μ croît indéfiniment.

Il en résulte que, si la probabilité d'un événement est inconnue, on peut en déterminer une valeur aussi approchée qu'on le désire en faisant un nombre d'épreuves suffisamment grand.

Ce résultat très important est la base de la statistique.

Les statistiques, établies d'après de nombreuses observations, ont pour but de déterminer la valeur de certains rapports; on n'obtient pas la valeur exacte de la probabilité mathématique, mais le rapport expérimental s'en rapproche d'autant plus que le nombre d'observations est plus grand.

B. — L'ASSURANCE CONSIDÉRÉE COMME JEU DE HASARD

L'assurance a pour but de remédier aux effets produits par des événements désastreux.

La Compagnie d'assurances peut être assimilée, au point de vue mathématique, au tenancier d'une maison de jeu; les assurés sont des joueurs, ils ont déposé leurs mises dans la caisse de la compagnie; mais si le sinistre se produit, l'assuré n'en retirera aucun bénéfice, ce n'est pas à lui qu'ira le total des enjeux : il recevra uniquement la somme nécessaire à la répara-

tion du dommage. La théorie du jeu s'applique donc sans réserve aux opérations des Compagnies d'assurances.

Espérance mathématique. — On appelle *espérance mathématique* d'une somme à recevoir éventuellement, le produit de cette somme par la probabilité qu'on a de la gagner.

On dit qu'un jeu est équitable lorsque la mise du joueur est égale à l'espérance mathématique de l'enjeu. Ainsi on joue à pile ou face : si la pièce montre face, on touche 2 francs; l'espérance mathématique est $2 \times \frac{1}{2}$: pour que le jeu soit équitable, il faut que la mise soit de 1 franc. Cette définition se justifie aisément; soit p la probabilité de l'événement favorable, μ un nombre d'épreuves assez grand, G l'enjeu, M la mise; si l'événement favorable s'est produit normalement, c'est-à-dire μp fois,

le total des gains est : $G \times \mu p$,
le total des mises est : $M \times \mu$.

Ces deux quantités doivent être égales, le sort n'ayant favorisé aucun des adversaires; par suite, on doit avoir :

$$G \times p = M,$$

c'est-à-dire que la mise doit être égale à l'espérance mathématique.

Jeux non équitables. — THÉORÈME. — Si la mise d'un joueur est inférieure à son espérance mathématique d'une quantité η, si petite soit-elle, la proba-

bilité que ce joueur a de faire un bénéfice tend vers 1 lorsque le nombre des parties croît indéfiniment.

Soit G l'enjeu, p la probabilité de gagner, μ le nombre des parties. Posons : $\varepsilon = \frac{\eta}{G}$.

La mise du joueur est : $pG - \eta = (p - \varepsilon)G$.

Au bout de μ parties supposons qu'on ait un écart α, le joueur a touché : $G(\mu p \pm \alpha)$;

il a misé : $G(p - \varepsilon)\mu = G(\mu p - \varepsilon\mu)$.

Son gain est donc :

$$G(\varepsilon\mu \pm \alpha) = G\mu\left(\varepsilon \pm \frac{\alpha}{\mu}\right).$$

Or ε est une quantité constante ; au contraire, $\frac{\alpha}{\mu}$ tend vers zéro quand μ augmente indéfiniment ; par suite, en faisant un nombre suffisamment grand de parties, le joueur est certain de gagner.

Chargement. — La quantité ε qui assure à l'un des joueurs un bénéfice certain est le *chargement*. Le chargement est nécessaire à toute entreprise commerciale spéculant sur le hasard (maisons de jeux, loteries, compagnies d'assurances), puisque le but de cette entreprise est de réaliser un bénéfice après avoir couvert ses frais généraux.

De la division des risques. — Le théorème relatif aux jeux non équitables nous montre qu'une Compagnie d'assurances dont les primes pures ont été chargées, est moralement certaine de faire un bénéfice,

mais à la condition que le nombre de ses assurés soit assez grand pour que le terme $\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{\mu}\right)$ soit toujours positif. Nous savons en effet que $\frac{\alpha}{\mu}$ tend vers zéro quand μ augmente indéfiniment.

On peut d'ailleurs calculer cette valeur de μ.

Supposons que, pour un conseil d'administration, la valeur :

$$\Theta(t_0) = 0,999999999$$

réprésente la certitude morale.

On sait que : $$t_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}.$$

α est la limite morale des écarts :

$$\alpha = t_0\sqrt{2\mu pq},$$

$$\frac{\alpha}{\mu} = \frac{t_0\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}}.$$

On doit avoir :

$$\frac{t_0\sqrt{2pq}}{\sqrt{\mu}} < \varepsilon;$$

c'est-à-dire : $$\mu > \frac{2pqt_0^2}{\varepsilon^2}.$$

Si cette condition est remplie, le bénéfice est moralement certain.

Supposons une Compagnie d'assurances n'assurant que des risques absolument identiques et payant toujours la même somme en cas de sinistre. Dans ce cas très simple, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — Le total des primes restant le même dans les deux cas, il vaut mieux, pour être certain d'un bénéfice, faire un grand nombre de petites assurances qu'un petit nombre de grosses assurances.

Soit une Compagnie A assurant un risque de probabilité p, ayant s assurés et payant π en cas de sinistre.

Soit une autre Compagnie B assurant le même risque, ayant ns assurés et payant $\frac{\pi}{n}$ en cas de sinistre.

Soit t_0 une valeur de t telle que $\Theta(t_0)$ soit très voisin de l'unité. Aux valeurs t_0 et s correspond une valeur α_s pour la limite des écarts; de même à t_0 et ns correspond α_{ns}.

$$\alpha_s = t_0 \sqrt{2spq},$$
$$\alpha_{ns} = t_0 \sqrt{2nspq}.$$

La perte que ferait la Compagnie A si l'écart atteignait α_s serait :
$$P_A = \alpha_s \pi = t_0 \pi \sqrt{2spq}.$$
La perte que ferait la Compagnie B si l'écart atteignait α_{ns} serait : $P_B = \alpha_{ns}\frac{\pi}{n} = \frac{t_0\pi\sqrt{2spq}}{\sqrt{n}} = \frac{P_A}{\sqrt{n}}$,

ce qui démontre la proposition.

Il y a donc intérêt pour la régularité des résultats à diviser les risques. C'est pour cette raison qu'un bookmaker n'accepte pas pour lui seul un pari trop élevé; c'est aussi pour cette raison qu'une Compagnie d'assurances contre l'incendie ne consent pas à assurer seule un risque très important.

Du plein. — A la division des risques correspond

la notion du plein. Le plein est la valeur maxima qu'une Compagnie peut assurer en conservant la probabilité $\Theta(t)$ de ne pas dépasser une limite de perte $x_1\pi$ déterminée à l'avance.

Si P est cette limite de perte déterminée à l'avance :

$$P = x_1\pi.$$

D'où π, le plein ; $$\pi = \frac{P}{x_1} = \frac{P}{t\sqrt{2spq}}.$$

Une Société se forme : elle réunit des capitaux ; si le chiffre d'affaires augmente, elle pourra facilement trouver de nouveaux capitaux ; dans ces conditions on peut faire croître la limite de perte proportionnellement[1] au chiffre d'affaires, c'est-à-dire à s : il en résulte alors le théorème suivant :

Théorème. — Le plein varie en raison directe de la racine carrée du nombre des assurances.

En effet, supposons que le nombre d'assurances devienne égal à ns. D'après ce qui précède, la limite de perte devient nP. La nouvelle valeur du plein est :

$$\pi' = \frac{nP}{t\sqrt{2nspq}} = \pi\sqrt{n}.$$

[1] Cette hypothèse est très raisonnable ; si le nombre d'assurances augmente, le bénéfice probable augmente proportionnellement ; la sécurité du placement reste donc la même.

LIVRE I

ASSURANCES SUR LA VIE

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

A. — DÉFINITIONS

Dans une Compagnie d'assurances sur la vie, les primes doivent être calculées d'après les probabilités de vie ou de décès des assurés. Évidemment, tous les assurés ne sont pas dans les mêmes conditions de santé, et on conçoit qu'un malade a moins de chances qu'une personne bien portante d'atteindre un âge avancé; logiquement la Compagnie devrait, pour la fixation de la prime, tenir compte de l'état de santé; pratiquement ce serait là une difficulté insurmontable. On se contente d'éliminer les personnes qui semblent être dans des conditions trop défavorables pour la Compagnie; on admet que la mortalité des autres dépend uniquement de leur âge. Nous nous trouvons alors en présence d'un problème très important : déterminer la probabilité de vivre dans n années pour une personne d'âge x.

Notations. — Nous noterons p_x^n la probabilité qu'a une personne d'âge x de vivre dans n années;

p_x^1 ou simplement p_x sera la probabilité pour une personne d'âge x de vivre au bout d'une année. Nous noterons q_x^n la probabilité pour une personne d'âge x d'être décédée dans n années; q_x^1 ou simplement q_x sera la probabilité pour une personne d'âge x d'être décédée au bout d'une année.

Entre ces quantités existent diverses relations.

D'abord : $$p_x^n + q_x^n = 1.$$

En effet, les probabilités d'être vivant ou décédé sont contraires; leur somme est donc égale à l'unité.

On a encore : $p_x^n = p_x^1 \times p_{x+1}^1 \times p_{x+2}^1 \cdots \times p_{x+n-1}^1$.

En effet, pour être vivant à l'âge $x + n$, il faut être vivant aux âges $x + 1, x + 2, \ldots\ x + n - 1$; en appliquant le théorème de la probabilité composée, on trouve la relation précédente.

De même on vérifie la relation :

$$p_x^{n+n'} = p_x^n \times p_{x+n}^{n'}.$$

Valeur de la probabilité p_x^n. — Considérons un groupe de v_x personnes vivantes, toutes d'âge x; supposons que la mortalité obéisse à des lois certaines, bien déterminées et *immuables*[1]; dans ces conditions

[1] On voit tout ce que nos hypothèses ont de conventionnel; les lois auxquelles obéit la mortalité sont mal déterminées; elles varient suivant les époques, suivant les climats, suivant les races, suivant les sexes. Les progrès de l'hygiène, de la science tendent à retarder la mort, tandis que d'autres causes, telles que l'alcoolisme, ont un effet contraire. En outre, la définition de la probabilité ne s'applique que si tous les cas sont également possibles, ce qui n'a pas lieu pour un groupe de personnes de santés différentes. Néanmoins nous continuerons à accepter cette hypothèse : 1° parce que les variations des lois de la mortalité sont

nous saurons, d'après les expériences déjà faites, que v_{x+n} personnes atteindront l'âge $x+n$; par suite, d'après la définition même de la probabilité,

$$p_x^n = \frac{v_{x+n}}{v_x}.$$

Détermination de v_{x+n}. — Supposons un nombre initial de personnes vivantes v_x; nous avons besoin de savoir combien de têtes seront encore vivantes à un âge quelconque $x+n$.

Une loi de mortalité peut se représenter de différentes manières, soit par une table de mortalité, soit par une courbe graphique, soit par une fonction analytique.

Quel que soit le procédé de représentation adopté, il sera facile de trouver la valeur de v_{x+n}.

Tables de mortalité [1]. — Ces tables sont à double entrée : on y voit d'une part les différents âges pour lesquels la mortalité a été observée et d'autre part les nombres de têtes vivantes aux âges correspondants. On voit immédiatement que ce mode de représentation n'est pas continu ; on ne pourra connaître exactement la valeur de v_{x+n} que si $x+n$ est un des âges contenus dans la table. Si $x+n$ ne figure pas

très faibles, qu'elles se produisent très lentement, et que les Compagnies d'assurances étudient ces variations pour en tenir compte; 2° parce que, comme nous l'avons déjà vu, on élimine les personnes dont les conditions de santé ne sont pas normales; 3° parce que, au point de vue pratique, nous ne cherchons pas à obtenir des résultats mathématiquement exacts, mais seulement des résultats suffisamment précis pour permettre l'exercice de l'industrie des Assurances.

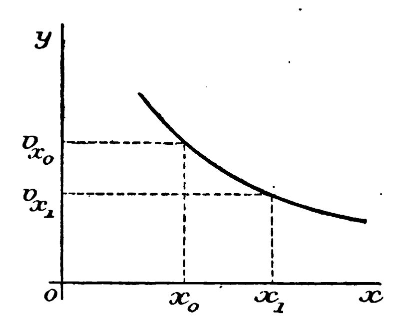
[1] Une étude des différentes Tables sera faite un peu plus loin. (Voir page 80.)

dans la table on trouvera v_{x+n} au moyen d'une interpolation : nous admettrons que, entre deux âges consécutifs de la table, les décès sont répartis uniformément, c'est-à-dire proportionnellement au temps. Cette hypothèse étant admise, supposons que $x+n$ soit compris entre les âges consécutifs $x+p$ et $x+q$; désignons par v_{x+p} et v_{x+q} les nombres de vivants aux âges $x+p$ et $x+q$. On a alors la relation :

$$\frac{(x+q)-(x+p)}{(x+n)-(x+p)} = \frac{v_{x+p}-v_{x+q}}{v_{x+p}-v_{x+n}},$$

d'où l'on tire v_{x+n}.

Courbes de mortalité. — Supposons qu'on ait pu représenter une loi de mortalité au moyen d'une courbe graphique. En abscisses on a porté les âges et en ordonnées les nombres de vivants.



Ce mode de représentation étant continu permettra de déterminer exactement v_{x+n} quelle que soit la valeur de $x+n$, pourvu que $x+n$ ne soit pas en dehors des limites pour lesquelles la courbe a été tracée.

Fonctions de survie[1]. — Supposons qu'on ait pu représenter la loi de mortalité au moyen d'une fonction analytique :

$$v_x = f(x),$$

on aura alors : $v_{x+n} = f(x+n)$

quelle que soit la valeur de $x+n$.

Probabilités de vie et de décès d'un groupe de deux têtes. — Considérons un groupe de deux têtes d'âges x et y. Nous noterons $p^n_{x,y}$ la probabilité de voir les deux têtes vivantes dans n années.

$p^n_{\overline{x,y}}$ désignera la probabilité de voir vivre dans n années *au moins* l'une des deux têtes (l'une des deux pouvant être morte) ;

$q^n_{x,y}$ désignera la probabilité de décès des deux têtes avant n années ;

$q^n_{\overline{x,y}}$ désignera la probabilité de décès de l'une *au moins* des deux têtes (l'une des deux pouvant être vivante).

Nous allons établir quelques relations entre ces diverses quantités.

1° $$p^n_{x,y} + q^n_{\overline{x,y}} = 1.$$

En effet, ces deux probabilités sont contraires. De même :

2° $$p^n_{\overline{x,y}} + q^n_{x,y} = 1 ;$$

3° $$p^n_{x,y} = p^n_x \, p^n_y .$$

En effet, la vie simultanée des deux têtes x et y est

[1] L'étude des fonctions de survie sera faite un peu plus loin. (Voir page 54.)

un événement composé : il faut que x soit vivant et que y le soit aussi; en appliquant le théorème de la probabilité composée, on trouve la relation ci-dessus.

4° $$\overset{n}{q}_{x,y} = \overset{n}{q}_x \overset{n}{q}_y = (1 - \overset{n}{p}_x)(1 - \overset{n}{p}_y);$$

5° $$\overset{n}{p}_{\overline{x,y}} = 1 - \overset{n}{q}_{x,y} = 1 - (1 - \overset{n}{p}_x)(1 - \overset{n}{p}_y)$$
$$= \overset{n}{p}_x + \overset{n}{p}_y - \overset{n}{p}_x \overset{n}{p}_y,$$

et enfin : $$\overset{n}{p}_{\overline{x,y}} = \overset{n}{p}_x + \overset{n}{p}_y - \overset{n}{p}_{x,y};$$

6° $$\overset{n}{q}_{\overline{x,y}} = 1 - \overset{n}{p}_{x,y} = 1 - \overset{n}{p}_x \overset{n}{p}_y.$$

Généralisation. — On pourrait considérer un nombre quelconque de têtes et employer des notations analogues à celles qu'on vient de voir :

$$\overset{n}{p}_{x,y,z,t\,\ldots}, \quad \overset{n}{p}_{\overline{x,y,z,t\,\ldots}}, \quad \overset{n}{q}_{x,y,z,t\,\ldots}, \quad \overset{n}{q}_{\overline{x,y,z,t\,\ldots}}.$$

On aurait entre ces quantités des relations analogues à celles que nous avons établies pour deux têtes [1].

Taux de mortalité. — Lorsqu'on veut se rendre compte de l'intensité de la mortalité, on observe le nombre de décès survenant pendant un laps de temps déterminé parmi un nombre connu de personnes.

Supposons que dans l'espace d'un mois 100 décès soient survenus dans un groupe de 100 000 personnes; la mortalité pourra être représentée, pour cette observation, par $\frac{100}{100\,000}$. Si, dans un autre groupe de

[1] En particulier, il est facile d'établir que les probabilités relatives à des groupes s'éteignant au dernier décès, tels que le groupe $\overline{xyzt}$, s'expriment linéairement en fonction de probabilités analogues relatives à des groupes s'éteignant au premier décès, tels que $xyzt$.

100 000 personnes, la mort a fait 200 victimes dans le même temps, la mortalité sera représentée par $\frac{200}{100\,000}$; elle est deux fois plus forte que dans le groupe précédent.

Si ces groupes sont constitués respectivement par des personnes de même âge, les rapports $\frac{100}{100\,000}$, $\frac{200}{100\,000}$, seront des *taux de mortalité*. On appelle donc taux de mortalité pour un âge et un temps déterminés le rapport du nombre de décès survenus pendant le temps considéré, au nombre de personnes vivantes au début de la période d'observation.

Les taux de mortalité permettent de comparer facilement les intensités de la mortalité aux différents âges. Si à 38 ans le taux de mortalité pour une année est 0,009, et si à 52 ans le taux est 0,018, on verra immédiatement qu'il meurt deux fois plus de personnes à 52 ans qu'à 38 ans. Pour faire cette comparaison facilement, il est nécessaire d'adopter une durée constante pour la période pendant laquelle on compte les décès. On a choisi l'année comme période constante, et on a dressé des tables donnant les taux *annuels* de mortalité aux différents âges.

Taux annuel de mortalité. — D'après ce qui précède, si v_x est le nombre des personnes vivantes à l'âge x, v_{x+1} le nombre des personnes restées en vie à l'âge $x+1$, c'est-à-dire un an plus tard, le taux annuel de mortalité à l'âge x a pour valeur

$$q_x = \frac{v_x - v_{x+1}}{v_x}.$$

De la table de mortalité, on déduira la table des taux annuels de mortalité. Inversement, la connaissance des taux annuels permettra la reconstitution de la table.

Soient q_{x_0}, q_{x_1}, q_{x_2}... q_{x_n} les taux annuels de mortalité aux âges x_0, x_1, ... x_n.

Soit v_{x_0} le nombre de vivants d'âge x_0 [1], v_{x_1}, ... v_{x_n} les nombres de survivants aux âges x_1, ... x_n.

De la relation : $$q_{x_0} = \frac{v_{x_0} - v_{x_1}}{v_{x_0}},$$

on tire : $$v_{x_1} = v_{x_0}(1 - q_{x_0});$$

v_{x_1} étant connu, on en déduit v_{x_2} au moyen de la même relation, et ainsi, de proche en proche, on reconstitue la table de mortalité.

Taux instantané de mortalité. — La définition générale du taux de mortalité que nous avons donnée plus haut conduit à la relation :

$$q_x^t = \frac{v_x - v_{x+t}}{v_x},$$

dans laquelle q_x^t est le taux de mortalité à l'âge x et pour le temps t. Supposons qu'on fasse décroître de plus en plus le temps t pendant lequel on observe les

[1] Le nombre v_{x_0} est tout à fait arbitraire; c'est le nombre initial de têtes soumises à la mortalité; ce nombre une fois fixé, les nombres v_{x_1}, v_{x_2},...v_{x_n} sont déterminés s'il existe une loi de mortalité.

décès; en désignant par dv_x la différentielle de la fonction v_x, le taux q_x^t tend vers la valeur :

$$\frac{-dv_x}{v_x} = -\frac{v'_x}{v_x}dt,$$

v'_x étant la dérivée de la fonction v_x.

Le rapport $\frac{-v'_x}{v_x}$ est par définition le *taux instantané de mortalité;* nous le noterons $\varkappa_x$.

Remarque I. — Nous avons vu que la connaissance de la table de mortalité permet de déterminer les taux annuels de mortalité, mais seulement pour les âges figurant dans la table; de même, la connaissance de la fonction de survie $v_x = f(x)$ permet de déterminer la valeur du taux instantané de mortalité, et ceci pour un âge quelconque.

Remarque II. — La connaissance des taux annuels de mortalité permet de reconstituer la table de mortalité; de même, si la fonction $\varkappa_x$ est connue, on en déduit la fonction de survie v_x.

En effet, on a : $\varkappa_x = -\frac{v'_x}{v_x}$.

Or $\frac{v'_x}{v_x}$ est la dérivée de $\log. v_x$; on a donc :

$$\int \varkappa_x dx = -\log v_x + \log K,$$

ou, d'après la définition des logarithmes :

$$v_x = Ke^{-\int \varkappa_x dx}.$$

La fonction v_x est déterminée par cette relation à un facteur constant K près.

Vie probable. — La probabilité qu'une personne d'âge x vivra dans un temps t est, comme nous le savons,

$$p_x^t = \frac{v_{x+t}}{v_x};$$

lorsque t croît de zéro à l'infini, p_x^t décroît de 1 à zéro. Il y a une valeur θ pour laquelle $p_x^\theta = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'une personne d'âge x a autant de chances de vivre dans θ années que d'être morte à cette époque; θ est la valeur de la vie probable à l'âge x.

Exemple. — La table de mortalité AF donne 796 786 comme nombre de vivants à l'âge de 25 ans. Quelle est la vie probable à cet âge ?

Soit θ la valeur cherchée; à l'âge $25 + \theta$, le nombre des vivants sera $\frac{796\,786}{2} = 398\,393$. Cherchons, dans la table de mortalité, à quel âge correspond ce nombre de survivants. Pour l'âge de 65 ans, on trouve 414 214; pour 66 ans, on trouve 394 851.

Admettons l'hypothèse de l'égale répartition des décès entre ces deux âges. Il y a dans l'année entière :

$$414\,214 - 394\,851 = 19\,363 \text{ décès.}$$

D'autre part, de 65 ans à $25 + \theta$ le nombre de décès est de : $414\,214 - 398\,393 = 15\,821$.

Une simple proportion montre que ces 15 821 morts surviennent en :

$$\frac{365 \times 15\,821}{19\,363} = 298 \text{ jours.}$$

On a donc :

$$25 \text{ ans} + \theta = 65 \text{ ans} + 298 \text{ jours}.$$

D'où $$\theta = 40 \text{ ans et } 298 \text{ jours}.$$

Vie moyenne. — Supposons qu'un groupe de N personnes, toutes décédées, ait vécu un nombre M d'années; les unes ont pu vivre 30 ans, d'autres 40, certaines 60; M est la somme des âges atteints par les N personnes du groupe; nous appellerons vie moyenne dans ce groupe le rapport $\frac{M}{N}$.

Proposons-nous de trouver, d'après les données de la table de mortalité, quelle est la vie moyenne dans un groupe de v_x personnes, toutes d'âge x. Ces personnes ont déjà vécu $v_x \times x$ années. Cherchons ce qu'elles ont encore à vivre. Dans un an, il restera v_{x+1} personnes vivantes ayant vécu un an chacune depuis l'âge x. Un an après, il en restera v_{x+2} ayant vécu une nouvelle année; le nombre d'années vécues depuis l'âge x est donc $v_{x+1} + v_{x+2}$. Soit ω l'âge au delà duquel il n'y a plus de survivants, c'est-à-dire le dernier âge figurant dans la table de mortalité [1]; le nombre total d'années *entières* vécues par les v_x personnes considérées est donc :

$$v_x \times x + v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \cdots + v_\omega.$$

Mais, dans ce qui précède, nous n'avons tenu compte que des années entières; il faut encore ajouter les *fractions d'année* vécues par les v_x têtes. Admettons,

[1] ω est tel que $v_{\omega+1}$, $v_{\omega+2}$ ... sont nuls.

comme nous l'avons déjà fait, l'égale répartition des décès dans de courtes périodes; cela revient à supposer que toutes les têtes considérées ont vécu, en plus du nombre entier d'années déjà comptées, une fraction de temps égale à six mois; pour les v_x têtes nous devons donc ajouter $\frac{v_x}{2}$ années, ce qui donne finalement :

$$v_x \cdot x + \frac{v_x}{2} + v_{x+1} + v_{x+2} + v_{x+3} + \cdots + v_\omega.$$

Divisons par v_x pour avoir la vie moyenne pour chaque tête :

$$\mu_x = x + \frac{1}{2} + \frac{v_{x+1} + v_{x+2} + \cdots + v_\omega}{v_x}.$$

La quantité : $\frac{1}{2} + \frac{v_{x+1} + v_{x+2} + \cdots + v_\omega}{v_x}$ est la vie moyenne à partir de l'âge x, ou, plus rapidement, vie moyenne à l'âge x.

Remarque. — Il importe de ne pas confondre la vie probable et la vie moyenne à l'âge x. Pour bien montrer que ces deux quantités sont très différentes l'une de l'autre, nous allons faire voir que, en faisant varier la loi de mortalité d'une manière convenable, on peut faire varier l'une d'elles en laissant l'autre constante. D'après la table AF, sur 796 786 personnes vivantes à l'âge de 25 ans, 398 393, soit la moitié, atteignent 65 ans et 298 jours. Supposons que la loi de mortalité reste la même pour les 398 393 premiers décès, mais que pour les têtes survivantes la vie soit prolongée de 2 ans. On voit aisément que la vie probable reste la

même, tandis que la vie moyenne est augmentée d'un an.

Vie mathématique. — Pour compléter ces définitions, il conviendrait de définir la vie mathématique; nous le ferons un peu plus loin, lorsque nous aurons étudié les annuités viagères (page 108).

B. — STATISTIQUES — SÉLECTION

Quand, au paragraphe précédent, nous avons défini le taux de mortalité, nous avons supposé que nous connaissions la loi de survie correspondante, et que nous pouvions déterminer exactement, lorsqu'un groupe de têtes nous était donné, le nombre de ces têtes qui doivent être vivantes à un moment quelconque. La résolution de ce problème n'est évidemment pas possible *à priori*. Il nous faut préalablement classer, coordonner les résultats expérimentaux, les répartir en groupes rationnels, faire en somme de la statistique; ce n'est qu'ensuite que nous pourrons généraliser, en nous appuyant sur la réciproque du théorème de Bernoulli, et étendre à des groupes nouveaux, mais comparables à ceux qui auront été étudiés, les résultats fournis par l'observation de ces derniers.

Il y a une foule de conditions qui influent sur la mortalité, et, rationnellement, on ne devrait admettre dans un groupe que des têtes soumises aux mêmes influences, et placées dans les mêmes conditions. Mais

une statistique n'a de valeur qu'autant que les observations sont en très grand nombre. Et c'est une grosse difficulté à résoudre que de pouvoir disposer, pour une même catégorie, de données en quantité suffisante. On est, par suite, obligé de grouper ensemble des têtes placées *à peu près* dans les mêmes conditions et soumises à des influences comparables, quoique non identiques.

En particulier, s'il s'agit d'une statistique effectuée au sein d'une Compagnie d'assurances, le nombre de cas observés est relativement restreint; si l'on veut les répartir en groupes trop nombreux, on arrive rapidement à n'obtenir que des statistiques portant sur un effectif trop faible et n'ayant, par conséquent, aucune valeur.

Passons rapidement en revue les différentes causes qui peuvent influer sur la mortalité.

Age. — Au premier rang, nous trouvons l'âge. Il est évident que le taux de mortalité d'un groupe de têtes de soixante ans est plus élevé que le taux de mortalité d'un groupe de têtes de trente ans. Le taux de mortalité dépend essentiellement de l'âge; mais on est trop souvent porté à croire que l'influence de ce facteur est si grande, que l'on peut négliger complètement les autres. Il n'en est rien cependant, et si l'on a trop longtemps commis cette erreur, on commence, à l'heure actuelle, à se préoccuper d'une foule d'autres causes qui influent d'une façon très notable sur la mortalité et que seuls le défaut de méthode et le manque de données statistiques avaient empêché de considérer.

Sexe. — Ainsi, rien ne prouve, *à priori*, que la mortalité des hommes doive être identique à celle des femmes. Les statistiques faites en Angleterre pour l'établissement des tables H^M et H^F, en Allemagne pour l'établissement des tables M_1 et W_1, montrent qu'en réalité les taux de mortalité de chaque sexe à un âge donné diffèrent sensiblement. D'après ces tables, la mortalité des femmes est supérieure à celle des hommes de vingt à cinquante ans, inférieure ensuite.

En France, bien que les Compagnies d'assurances sur la vie, lors des travaux préparatoires à l'établissement des tables RF et AF[1], aient, comme nous le verrons plus loin, distingué le sexe de leurs assurés, elles n'ont cependant publié aucun travail à ce sujet, et dans les Tables du Comité on ne trouve pas trace de cette distinction.

La table de mortalité, relative à la population générale de la France, publiée par les soins du Ministère du Commerce après le recensement du 24 mars 1901, indique pour les femmes une mortalité à peu près constamment inférieure à celle des hommes, à partir de l'âge de dix-neuf ans.

Profession. — La profession influe notablement sur la mortalité. Dans une statistique rationnelle, on ne saurait évidemment ranger dans une même catégorie les cochers et les rentiers, les peintres en bâtiment et les ecclésiastiques. Il est vrai que, jusqu'à présent, la clientèle habituelle des Compagnies d'assurances sur

[1] La table AF est relative aux assurés en cas de décès; la table RF s'applique aux assurés en cas de vie.

la vie s'est recrutée surtout dans la classe aisée. L'assurance sur la vie ne s'est pas encore, en France du moins, démocratisée. Aussi les Compagnies n'ont-elles pas, dans leurs statistiques, tenu compte de la profession, estimant que leurs assurés exerçaient des professions dont les taux de mortalité au même âge étaient comparables, et que, d'ailleurs, la proportion d'assurés occupant différents emplois était sensiblement constante. Elles se contentent de refuser les risques trop dangereux, de même qu'elles refusent pour les assurances en cas de décès les têtes trop âgées.

Mais quand l'assurance sur la vie deviendra réellement populaire, la profession est une des causes de mortalité dont il faudra le plus se préoccuper, et il sera essentiel d'établir des statistiques par professions.

Climat. — Une statistique n'aurait évidemment plus de valeur si elle s'étendait à des régions trop éloignées les unes des autres. A quoi pourrait servir une statistique dont les résultats engloberaient à la fois les données recueillies en Europe et en Afrique ? Les conditions de l'existence varient avec le climat. Et il importe surtout de tenir compte de ce facteur dans le cas d'assurés qui voyagent ou qui vont s'établir en des contrées lointaines ou malsaines. Les Compagnies françaises majorent alors la prime stipulée au contrat en y ajoutant une *surprime de voyage* ou de séjour à l'étranger, déterminée d'ailleurs empiriquement.

Époque. — Enfin, l'époque influe sur la longévité. Les tables de Deparcieux et de Duvillard ne sont plus employées aujourd'hui, parce qu'elles indiquent une

mortalité trop rapide. On doit cependant admettre qu'elles représentaient assez bien la mortalité des Français à la fin du XVIII[e] siècle, époque de leur construction, et il est probable que la mortalité est plus lente aujourd'hui qu'autrefois.

Le développement de l'hygiène sociale tend à augmenter la durée de la vie humaine. Si l'on distingue, avec Gompertz, dans le phénomène de la mort, deux causes principales : le hasard et l'affaiblissement graduel de l'individu, on ne peut espérer réduire la part du hasard; mais ne peut-on ralentir de plus en plus la marche de la vieillesse en fortifiant les organes et en les rendant capables de résister plus longtemps? Grâce aux progrès incessants de la médecine, ne resserre-t-on pas peu à peu les limites du domaine des maladies dites évitables : tuberculose, typhoïde, variole, et ne prétend-on pas, aujourd'hui, vaincre l'artério-sclérose elle-même?

Autres causes. — Un grand nombre d'autres causes peuvent influer sur la mortalité des individus : les conditions matérielles de l'existence, l'observation des règles d'hygiène, le genre de vie, l'alimentation, le milieu, l'hérédité. Il n'est pas possible de tenir compte de tout cela dans les statistiques, et les Compagnies françaises se contentent d'éliminer les mauvais risques après examen médical.

En Angleterre, on n'élimine pas *a priori* les personnes qui demandent à s'assurer en cas de décès et dont la santé n'est pas absolument satisfaisante; mais on leur applique une table de mortalité spéciale (table D^{MF}). On divise donc les assurés en deux catégories,

d'après leur état de santé au moment de la conclusion du contrat.

Sélection à l'entrée. — La clientèle des Compagnies françaises d'assurances sur la vie ne saurait être comparée, au point de vue de la mortalité, à la population générale de la France.

Les assurés en cas de décès sont en effet soumis, au moment de la conclusion du contrat, à un examen médical approfondi, et ils doivent donner, sous peine de déchéance, des renseignements exacts sur leurs antécédents physiologiques, héréditaires ou personnels. Il s'opère donc, au moment de l'entrée dans l'assurance, une sélection sérieuse, et on peut considérer que tous les assurés en cas de décès sont en parfait état de santé à ce moment.

Les assurés en cas de vie et les rentiers viagers ne sont naturellement soumis à aucun examen médical. Mais les assurés de cette catégorie estiment, au moment de la signature du contrat, présenter des chances de longévité suffisantes pour en atteindre le terme. Ils sont donc tous en bonne santé ou se jugent tels. Et la statistique leur donne raison. En effet, si l'on compare les tables RF et AF, on voit que les taux de mortalité indiqués par cette dernière sont régulièrement plus élevés que ceux de la première; ce qui prouve que l'examen que l'intéressé fait de lui-même est plus efficace que l'examen médical auquel il pourrait être soumis, examen forcément rapide, effectué par un praticien qui voit pour la première fois le proposant et qui ignore tout de son passé, de ses antécédents personnels ou héréditaires, de son genre de vie et de ses habitudes.

Les différentes combinaisons d'assurances se ramènent toutes à la juxtaposition d'une assurance en cas de décès et d'une assurance en cas de vie. Selon que l'une ou l'autre prédomine, il y a ou non examen médical, et les conclusions précédentes subsistent.

On peut donc dire que toutes les personnes qui souscrivent un contrat viager auprès d'une Compagnie française sont dans un état de santé satisfaisant. Mais un certain nombre d'années après la conclusion du contrat, il n'en est plus forcément de même. Pour un même âge, les taux de mortalité sont d'autant plus élevés que les contrats correspondants sont plus anciens. Il est clair, par exemple, qu'un groupe d'assurés nouveaux de 40 ans doit présenter un taux de mortalité moindre qu'un groupe d'assurés de 40 ans dont les contrats sont en cours depuis 20 ans déjà. Les premiers viennent en effet de subir la sélection à l'entrée; les seconds, depuis 20 ans, ont pu être soumis à des vicissitudes diverses ayant eu pour effet de modifier fâcheusement leur état de santé initial.

L'expérience vérifie ces prévisions, si l'on en croit les statistiques dressées par le docteur Sprague et M. King en Angleterre, par M. Raffmann en Allemagne.

La conclusion s'impose : il est nécessaire, dans le calcul de la prime d'une assurance donnée, d'appliquer à chaque contractant la loi de survie déduite des observations faites sur des têtes entrées au même âge que lui. Il faut pour cela disposer de *tables par âges à l'entrée*. Il n'y a pas encore eu de semblable table publiée en France. Les Compagnies allemandes font usage de la table de M. Raffmann, et quelques Compagnies anglaises, de celle de M. Sprague.

On peut facilement se faire une idée de l'erreur introduite dans les calculs par la substitution d'une table unique à une série de tables par âges à l'entrée. Si l'on considère, en effet, un groupe d'assurés d'âge x au nombre de :

$$N = n_0 + n_1 + \dots + n_k,$$

en désignant par n_0 le nombre d'assurés de ce groupe entrés l'année même, par n_1 ceux qui sont entrés l'année précédente, etc., le taux de mortalité de ce groupe pendant la $(x+1)^e$ année d'âge de ces assurés sera égal à :

$$t = \frac{d_x}{n_0 + n_1 + \dots + n_k},$$

d_x étant le nombre total des décès du groupe pendant l'année considérée. Or d_x se compose du nombre d_x^0 d'assurés décédés, entrés dans le groupe l'année même, augmenté du nombre d_x^1 d'assurés entrés l'année précédente, etc. : $t = \dfrac{d_x^0 + d_x^1 + \dots + d_x^k}{n_0 + n_1 + \dots + n_k}$.

Si le groupe ne se composait que de n_i têtes d'âge x entrées depuis i années, le taux de mortalité de ces têtes serait, à l'âge x :

$$\tau_i = \frac{d_x^i}{n_i}.$$

Donc : $t = \dfrac{n_0\tau_0 + n_1\tau_1 + \dots + n_k\tau_k}{n_0 + n_1 + \dots + n_k}$.

D'après les considérations qui précèdent, on a en général : $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_k$.

Donc t est compris entre la plus grande et la plus faible de ces quantités :

$$\tau_0 < t < \tau_k.$$

Mais si n_0, n_1, ... sont supérieurs aux derniers nombres n_k, n_{k-1}, ... ce sont les taux τ_0, τ_1, ... relatifs aux têtes entrées récemment qui influent le plus sur la valeur du taux moyen t et inversement.

Pour les âges jeunes, le nombre des têtes entrées depuis longtemps dans l'assurance est très faible ; c'est le taux de mortalité des têtes venant de subir la sélection qui influe le plus sur le taux moyen. L'inverse se produit pour les têtes âgées, dont le taux de mortalité t se rapproche davantage du taux τ_k des têtes assurées depuis longtemps.

Or les rentiers viagers sont très rares aux âges inférieurs à 50 ans. Au contraire, à partir de 60 ans, les Compagnies n'assurent plus en cas de décès, et l'affluence la plus grande pour cette catégorie se produit à l'âge de 35 ans environ. Il en résulte que, à un âge donné, 60 ans par exemple, et pour deux groupes égaux, composés l'un d'assurés en cas de vie, l'autre d'assurés en cas de décès, les rentiers viagers entrés récemment dominent dans le premier, et le taux moyen doit se rapprocher de τ_o, tandis que le taux du second groupe doit se rapprocher de τ_k. Donc, le taux de mortalité relatif aux rentiers viagers donné par une table indépendante de l'âge à l'entrée doit être plus faible que le taux correspondant relatif aux assurés en cas de décès. Cette considération peut expliquer la différence qui existe entre les tables AF et RF, indépendamment de la différence d'efficacité entre l'autosélection et la sélection médi-

cale à l'entrée signalée plus haut. Il est probable cependant que les deux causes s'ajoutent pour produire le phénomène constaté expérimentalement.

Antisélection. — Enfin une troisième cause peut agir dans le même sens pour augmenter encore le taux de mortalité des assurés en cas de décès. En effet, ces derniers peuvent, quand ils ont payé un certain nombre de primes annuelles (trois au minimum), abandonner leur police, et la portion des primes payées qui a été versée en trop pour assurer le risque pendant les premières années, portion qui sert à constituer la réserve mathématique de la catégorie considérée, appartient à l'assuré, déduction faite d'une indemnité de résiliation. (Voir page 272, Rachat.)

Les Compagnies versent donc aux assurés qui résilient après paiement de 3 primes annuelles un capital de rachat. Or, quels sont ceux qui abandonnent ainsi leur contrat? Ce sont ceux qui ne peuvent plus payer leurs primes ou ceux qui se jugent assez bien portants pour que la combinaison d'assurance choisie devienne véritablement trop onéreuse pour eux. On a remarqué que cette dernière cause de résiliation était la plus fréquente. Ce sont donc les meilleurs risques qui disparaissent ainsi.

Mais, étant donné un groupe d'assurés, ce qui importe à l'assureur, ce n'est pas de savoir combien d'entre eux seront encore vivants dans n années, c'est de savoir combien il en restera dans le groupe, que les disparus soient morts ou aient résilié. Comme les personnes qui résilient sont en général les mieux portantes, il en résulte que le taux de mortalité des

assurés en cas de décès se trouvera encore augmenté de ce chef.

Les assurés qui versent des primes annuelles pour l'assurance d'un capital différé en cas de vie ne peuvent pas racheter leurs polices; mais ils peuvent cesser de payer leurs primes, et c'est ce que font ceux qui pensent n'avoir que fort peu de chances d'atteindre le terme du différé. Leurs contrats ne sont pas alors annulés, mais réduits; et si les assurés sont encore vivants au terme fixé, on leur attribue une fraction seulement du capital assuré. Comme ces personnes sont précisément celles dont les chances de vie sont les plus faibles, leur présence contribue à augmenter le taux de mortalité de leur catégorie. Dans la construction de la table déduite des observations, il serait rationnel de les éliminer au fur et à mesure de la cessation du paiement de leurs primes et de ne considérer chaque année comme vivants que les assurés qui continuent à remplir leurs engagements.

Mais quand on se sert de tables de mortalité par âges à l'entrée, on peut considérer les primes versées annuellement comme une série de primes uniques : on tient compte ainsi de la sélection qui se produit parmi les assurés par le fait même du paiement des primes successives, et cela sans avoir à éliminer, dans le calcul du nombre des assurés vivants, ceux qui ont abandonné le paiement de leurs primes, ce que l'on ne pourrait faire avec une table par âge à l'entrée, puisque cette table donne à chaque âge le nombre des assurés dont la police est en cours. Or une police réduite continue à suivre son cours; elle est donc comprise dans les observations.

C. — TABLES DE SURVIE

Construction. — Les tables que l'on construit directement, d'après les données de l'expérience, sont les tables des taux de mortalité, et on en déduit les tables de survie en calculant les nombres successifs de vivants au moyen des relations :

$$v_1 = v_0 (1 - q_0)$$
$$v_2 = v_1 (1 - q_1) = v_0 (1 - q_0)(1 - q_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

le nombre initial v_0 étant d'ailleurs pris arbitrairement.

Pour construire une table des taux de mortalité annuels, la méthode la plus rationnelle consiste à suivre pendant une année des groupes de têtes de même âge et à noter les décès qui se produisent dans ces groupes. Si le groupe étudié se compose de N_x têtes d'âge x et si d_x est le nombre des décès qui surviennent pendant l'année, le taux de mortalité à l'âge x sera pris égal à

$$q_x = \frac{d_x}{N_x}. \qquad (1)$$

L'âge x sera évalué à une demi-année près : on considérera, par exemple, comme nées au 1er janvier 1907 toutes les têtes nées à une date comprise entre le 1er juillet 1906 et le 30 juin 1907.

La difficulté vient de ce qu'il ne faut pas perdre de vue pendant l'année les différentes têtes qui composent les groupes étudiés et de ce qu'il ne faut pas laisser s'y

introduire des têtes étrangères. Si ces désidérata peuvent à la rigueur être réalisés lorsqu'il s'agit de statistiques faites au sein d'une Compagnie d'assurances, où une fiche spéciale est affectée à chaque contrat, ils ne le seront certainement pas lorsqu'on étudiera la mortalité d'un pays tout entier. Dans le cours d'une année en effet, un certain nombre de têtes du groupe disparaissent sans que l'on puisse en déterminer la raison ; d'autres têtes, en nombre également inconnu, viennent se mêler aux têtes primitives et entrent en observation. Si n est le nombre des têtes au début, n' leur nombre à la fin, on pourra prendre pour le nombre N_x de la relation (1) la moyenne $\frac{n+n'}{2}$, ce qui revient à supposer que les têtes qui ont disparu et celles qui se sont introduites sont restées en observation pendant une demi-année en moyenne.

Des statisticiens ont préconisé et expérimenté d'autres méthodes que nous ne citons ici que pour mémoire. Ainsi Halley a employé, pour dresser la table de survie des habitants de la ville de Breslau, une méthode qui consistait à relever pendant une année le nombre des décès constatés aux différents âges :

$$d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ \ldots\ d_\omega,$$

et à prendre comme valeur du taux de mortalité à l'âge x la valeur du rapport :

$$\frac{d_x}{d_x + d_{x+1} + \ldots + d_\omega}.$$

Or, pour que le nombre des têtes d'âge x observées puisse être considéré comme dénominateur de cette expression, il faudrait que la population restât abso-

lument stationnaire, c'est-à-dire que la natalité fût constante et qu'il n'y eût aucun mouvement d'émigration ni d'immigration.

Le Ministère du Travail, en France[1], après chaque recensement, détermine les taux de mortalité relatifs à la population globale française. Le nombre N_x des têtes d'âge x est fourni par les résultats généraux du recensement ; et le nombre d_x des décès de ce groupe dans l'année est fourni par les registres de l'état civil. La méthode peut donner de bons résultats, car la population recensée est bien celle qui fournit les décès relevés sur les registres de l'état-civil : la seule cause d'erreur qui puisse intervenir est le mouvement de la population produit par l'immigration et l'émigration.

Le Ministère publie les résultats obtenus sous la forme de 3 tableaux relatifs, l'un au sexe masculin (P^M), le second au sexe féminin (P^F) et le troisième à la population générale (P^{MF}). Le tableau de la page suivante permet de comparer, de 10 en 10 ans jusqu'à 70 ans, les tables de survie et des taux de mortalité annuels, construites d'après les résultats du recensement du 24 mars 1901 avec les tables AF et RF.

Ajustement. — Quand on a établi, d'après les principes exposés précédemment, une table de survie ou une table des taux de mortalité, si l'on cherche à construire la courbe correspondante, en prenant pour abscisses les âges et pour ordonnées les taux de mortalité ou les nombres de vivants, on remarque que la courbe obtenue est tout à fait irrégulière. Or les résul-

[1] Autrefois le Ministère du Commerce.

AGES	P^M		P^F		P^{MF}		AF		RF	
	Survivants sur 100.000 nés vivants	Taux annuel de mortalité	Survivants sur 100.000 nés vivants	Taux annuel de mortalité	Survivants sur 100.000 nés vivants	Taux annuel de mortalité	Survivants sur 100.000 nés vivants	Taux annuel de mortalité	Survivants sur 100.000 nés vivants	Taux annuel de mortalité
10 ans	75 944	0,00303	78 616	0,00328	77 253	0,00314	86 668	0,00364	86 668	0,00364
20 —	72 948	0,00699	75 246	0,00627	74 076	0,00663	82 416	0,00690	82 416	0,00690
30 —	67 653	0,00786	70 068	0,00759	68 837	0,00773	77 108	0,00698	77 168	0,00664
40 —	61 641	0,01104	64 583	0,00879	63 082	0,00991	71 132	0,00975	71 734	0,00834
50 —	53 818	0,01701	58 385	0,01244	56 057	0,01468	62 873	0,01638	64 882	0,01275
60 —	43 199	0,03084	49 441	0,02436	46 264	0,02745	50 142	0,03213	54 660	0,02411
70 —	27 465	0,06832	34 053	0,05850	30 696	0,06298	31 230	0,06897	38 292	0,05298

tats fournis par une des méthodes précédentes ne sont que les plus probables, les observations étant forcément en nombre limité, et l'erreur à craindre sur chaque détermination est en raison inverse de la racine carrée du nombre des observations[1]. On peut remarquer d'ailleurs que, de deux courbes, la plus régulière est celle qui a été dressée avec le matériel statistique le plus riche et le mieux ordonné. Il est donc permis de penser que si les observations pouvaient être assez nombreuses pour donner des résultats rigoureusement exacts, la courbe aurait une forme absolument régulière, traduisant une loi de variation continue. L'esprit est d'ailleurs involontairement porté à rechercher la continuité dans toutes les classes de phénomènes physiques.

Aussi, il a paru naturel de substituer à la courbe irrégulière traduisant brutalement les résultats expérimentaux, une courbe à allure régulière, s'en rapprochant autant que possible, et passant au besoin par les points que l'on peut considérer comme ceux qui ont été déterminés avec la plus grande précision. On réalise ainsi ce que l'on nomme un *ajustement graphique*. Pour tenir compte du poids des diverses observations, il est avantageux d'encadrer la courbe ou la ligne brisée primitive entre deux autres obtenues en portant en ordonnée de part et d'autre de chaque point de la première une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre des têtes observées. Les trois courbes sont d'autant plus voisines que la précision du taux considéré est plus grande, et la main du dessinateur est ainsi plus sûrement guidée.

[1] C'est une conséquence du théorème de Bernoulli.

On peut aussi procéder à l'ajustement des résultats expérimentaux par la méthode analytique, en remplaçant l'ensemble obtenu par un autre ensemble aussi voisin que possible du premier, mais ordonné suivant une loi de variation continue. On cherchera à établir une relation algébrique entre le nombre des vivants v_x à un certain âge x et cet âge lui-même :

$$v_x = f(x) ; \qquad (1)$$

$f(x)$ contiendra autant de paramètres arbitraires que l'on voudra, et on les déterminera en égalant aux taux de mortalité observés ceux qui sont déduits de la relation (1).

On peut enfin, après avoir procédé à l'ajustement graphique, chercher à former à priori l'équation d'une courbe simple se rapprochant autant que possible de la courbe obtenue, pour étudier ensuite cette équation et en tirer tous les résultats utiles qu'elle peut fournir.

Avant de donner des exemples classiques de ces divers modes d'ajustement, nous allons chercher à déterminer sur quel élément fourni par l'expérience il est plus avantageux de faire porter cet ajustement. Nous avons vu que l'on tirait directement des observations les taux de mortalité et que l'on en déduisait ensuite les nombres de vivants à chaque âge. Ajustera-t-on les taux de mortalité ou les nombres de vivants, la table des taux ou la table de survie?

Supposons que l'ajustement ait porté sur le nombre des vivants aux différents âges. Soit v_x ce nombre à l'âge x, déduit des observations brutes, et $v_x + \Delta v_x$ le nombre correspondant pris dans la table de survie

ajustée. Si l'on désigne par d_x le nombre de décès observés à l'âge x,

$$d_x = v_x - v_{x+1}$$

$$\Delta d_x = \Delta v_x - \Delta v_{x+1},$$

par q_x et q'_x le taux brut et le taux ajusté au même âge, on a :

$$q'_x = \frac{d_x + \Delta d_x}{v_x + \Delta v_x} = \frac{d_x}{v_x} + \frac{v_x \Delta d_x - d_x \Delta v_x}{v_x (v_x + \Delta v_x)}.$$

On peut considérer que d_x et Δv_x sont du même ordre de grandeur si v_x est suffisamment grand, et on peut négliger au numérateur le produit $d_x \Delta v_x$ vis-à-vis de $v_x \Delta d_x$ et au dénominateur le produit $v_x \Delta v_x$ vis-à-vis de v_x^2. On obtient alors :

$$q'_x = q_x + \frac{\Delta d_x}{v_x} = q_x + \frac{\Delta v_x - \Delta v_{x+1}}{v_x},$$

et la différence entre les taux de mortalité brut et ajusté est du même ordre de grandeur que le taux lui-même. Elle peut même dépasser ce taux, et cela arrive fréquemment, surtout lorsque Δv_x et Δv_{x+1} sont de signes contraires. Il faudra donc comparer les taux ainsi ajustés aux taux observés pour voir si les premiers sont admissibles. Mais, puisqu'il faut en arriver à cette comparaison, autant vaut commencer par là et ajuster non pas la table de survie, mais la table des taux de mortalité.

Méthode graphique. — Méthode de Woolhouse. — Nous avons exposé précédemment d'une façon très rapide la manière dont on procède à l'ajus-

tement graphique. On peut en voir un exemple dans les Tables du Comité des Compagnies françaises d'Assurances à primes fixes sur la vie. Les planches qui sont à la fin du volume de ces Tables représentent l'ajustement des Tables AF et RF qui est un des plus parfaits qu'il ait été donné d'exécuter.

M. Woolhouse a donné son nom à une méthode graphique particulière qui a eu son heure de célébrité. Elle a servi notamment à l'ajustement de certaines tables anglaises, et elle a été utilisée aussi lors des travaux préparatoires à l'établissement des tables AF et RF.

M. Woolhouse ajuste non la courbe des taux de mortalité, mais la courbe de survie. Il porte en abscisses les âges, en ordonnées les nombres de vivants, et considère des groupes de paraboles du 2e degré déterminées de la façon suivante :

Chaque groupe se compose de 5 paraboles passant chacune par 3 points qui représentent les nombres de vivants déduits des observations à des âges variant de 5 années en 5 années. Ainsi un groupe de ces paraboles se composera de 5 courbes passant par les points qui correspondent aux âges suivants :

1re parabole. . .	$x-7$	$x-2$	$x+3$
2e — . . .	$x-6$	$x-1$	$x+4$
3e — . . .	$x-5$	x	$x+5$
4e — . . .	$x-4$	$x+1$	$x+6$
5e — . . .	$x-3$	$x+2$	$x+7$

Ces courbes coupent la parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse x en 5 points distincts. La moyenne arithmétique des ordonnées de ces 5 points est prise comme ordonnée correspondant à l'âge x de la courbe

ajustée. Ainsi chaque groupe de paraboles fournira un point de la courbe ajustée.

Si l'on établit, à l'aide de la formule d'interpolation de Newton, les équations de ces paraboles, on résoudra aisément le problème par le calcul.

Cette méthode a donné lieu à de sérieuses critiques. Elle est tout empirique et n'offre aucune base rationnelle. L'ajustement, il est vrai, n'est pas destiné à donner des résultats meilleurs, plus exacts, que ceux que l'observation directe a fournis; il sert seulement à régulariser ces résultats, à les coordonner, à satisfaire à la loi de continuité qui doit régir les phénomènes physiques. Cependant, sous prétexte de présenter un ensemble continu, la table ne doit pas être déformée, elle doit se rapprocher d'autant plus des résultats expérimentaux que ces résultats sont plus certains: elle doit tenir compte du poids des observations. Or la méthode de M. Woolhouse considère tous les résultats expérimentaux comme équivalents et ne tient pas compte du degré de précision des observations. M. H. Laurent a critiqué à maintes reprises cette méthode dans le *Bulletin de l'Institut des actuaires français;* il a montré en particulier, dans le N° 62 de cette publication, qu'au lieu de diminuer les chances d'erreur sur les nombres obtenus expérimentalement, on les augmente.

Aussi, même appliquée à l'ajustement de la table des taux de mortalité, la méthode de M. Woolhouse ne peut donner que des résultats médiocres. Elle est aujourd'hui abandonnée, et son auteur lui-même y a renoncé.

Ajustement par la méthode analytique. — Au lieu de chercher à ajuster la courbe de survie traduisant les résultats expérimentaux, on peut se proposer de déterminer les coefficients d'une relation algébrique qui donnera le nombre des vivants en fonction de l'âge:

$$v_x = f(x). \qquad (1)$$

La forme de cette relation pourra être choisie à priori; la construction préalable de la courbe de survie guidera dans ce choix.

On comparera les taux de mortalité aux différents âges déduits de l'équation (1)

$$q_x = \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} \qquad (2)$$

à ceux qui ont été fournis par l'expérience, et l'on obtiendra une série de relations pouvant servir à déterminer les coefficients de $f(x)$.

Nous verrons plus loin que, pratiquement, ces coefficients sont en nombre très limité. Comme les observations doivent au contraire avoir été suffisamment nombreuses, la détermination des coefficients, et par suite l'ajustement analytique, se ramène à la résolution d'un système d'équations surabondant.

Pour tenir compte de la précision des diverses observations, on divisera l'ensemble des relations (2) obtenues en groupes composés chacun d'autant d'équations qu'il y a de coefficients à déterminer ; les taux de mortalité expérimentaux qui entrent dans un groupe particulier doivent présenter à peu près le même degré de certitude. La valeur M_1 d'un des coefficients cherchés est obtenue au moyen du groupe g_1 d'équations

avec une précision proportionnelle à la racine carrée $\sqrt{N_1}$ du nombre moyen des têtes observées lors de la détermination expérimentale des taux de mortalité qui entrent dans ce groupe g_1. Si M_1', M_1'', ... $M_1^{(n)}$ sont les diverses valeurs de M_1 tirées des différents groupes de relations (2) et N_1, N_2, ... N_n les nombres de têtes observées, on pourra prendre :

$$M_1 = \frac{M_1'\sqrt{N_1} + M_1''\sqrt{N_2} + \dots + M_1^{(n)}\sqrt{N_n}}{\sqrt{N_1} + \sqrt{N_2} + \dots + \sqrt{N_n}},$$

et l'on aura ainsi tenu compte des degrés de précision des expériences diverses.

Les valeurs approchées ainsi calculées peuvent être corrigées par l'application de la méthode des moindres carrés.

Méthode des moindres carrés. — La connaissance des valeurs approchées des coefficients cherchés M_1, M_2, ... permet de ramener à la forme linéaire les équations de condition telles que (2).

Soit, en effet :

$$\varphi(M_1, M_2, \dots M_n) = 0 \qquad (3)$$

l'une de ces équations, et $(m_1, m_2, \dots m_n)$ des valeurs approchées des inconnues.

On posera :

$$M_1 = m_1 + \delta m_1, \quad M_2 = m_2 + \delta m_2 \dots M_n = m_n + \delta m_n,$$

et on développera, par rapport à δm_1, δm_2, ... δm_n, en supposant ces corrections assez petites pour qu'on puisse se contenter de leurs premières puissances.

On sera ainsi conduit, pour les déterminer, à des équations de la forme :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial M_1}\right)_{\substack{M_1=m_1\\ M_2=m_2\\ \cdots}} \cdot \delta m_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial M_2}\right)_{\substack{M_1=m_1\\ M_2=m_2\\ \cdots}} \cdot \delta m_2 + \dots$$

$$+ \dots + \varphi(m_1, m_2, \dots m_n) = 0. \qquad (4)$$

. . . .

Les dérivées partielles, coefficients des inconnues δm_1, δm_2, ... sont calculées en y supposant les quantités M_1, M_2, ... remplacées par leurs valeurs approchées m_1, m_2, ... et on est ainsi ramené à résoudre un système d'équations du premier degré.

Considérons donc un tel système :

$$ax + by + cz + \dots = n$$
$$a'x + b'y + c'z + \dots = n'$$

. . . .

Les coefficients $a, b, c, \dots$ sont donnés par le calcul et exempts d'erreur ; les n, au contraire, quantités analogues à $\varphi(m_1, m_2, \dots m_n)$, sont données directement par les observations et sont affectées de leur incertitude.

Les valeurs des inconnues ne doivent point satisfaire nécessairement à l'une des équations en particulier, mais à leur ensemble et de la manière la plus exacte possible. Si l'on connaissait les valeurs précises des inconnues, et si on les substituait dans les premiers membres des équations, les valeurs numériques que prendraient ces premiers membres feraient connaître les erreurs des observations correspondantes, en supposant, comme nous le faisons, que les quantités observées soient représentées par les n.

Legendre a proposé, en 1805, de rendre minima la somme des carrés des différences entre les résultats qui seraient obtenus par le calcul et ceux qui sont donnés par l'observation directe. Cette condition, qui a fait donner à la méthode le nom de *méthode des moindres carrés*, fournit d'ailleurs un nombre d'équations égal au nombre des inconnues.

La somme des carrés des erreurs ou résidus est :

$$(ax + by + \ldots - n)^2 + (a'x + \ldots - n')^2 + \ldots$$

Le minimum de cette expression s'obtient en égalant à zéro les dérivées partielles par rapport à $x, y, \ldots$ On arrive ainsi aux équations finales en nombre égal à celui des inconnues :

$$\left.\begin{array}{l} a(ax+by+\ldots-n)+a'(a'x+b'y+\ldots-n')+\ldots=0 \\ b(ax+by+\ldots-n)+b'(a'x+b'y+\ldots-n')+\ldots=0 \end{array}\right\} (5)$$

. . . .

Legendre, pour justifier ce procédé, se borne à dire « qu'il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui, empêchant les extrêmes de prévaloir, est très propre à faire connaître l'état du système le plus proche de la vérité ». Il remarque, en outre, que la règle par laquelle on prend la moyenne entre les résultats des différentes observations n'est qu'une conséquence très simple de la méthode des moindres carrés. En effet, si l'observation a donné diverses valeurs $n, n', \ldots$ pour une certaine quantité x, la somme des carrés des erreurs sera :

$$(x - n)^2 + (x - n')^2 + \ldots,$$

et la condition du minimum donne

$$x - n + x - n' + \ldots = 0;$$

c'est-à-dire qu'il faut prendre x égal à la moyenne des valeurs observées.

Gauss [1] et Laplace [2] ont montré que la méthode des moindres carrés trouve sa justification dans la théorie des probabilités.

Étant donné le système considéré plus haut :

$$ax + by + cz + \ldots = n$$
$$a'x + b'y + c'z + \ldots = n',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

il s'agit de chercher le meilleur système de valeurs $(x, y, \ldots)$ parmi tous les comptes de valeurs $(x, y, \ldots)$. Pour chaque système de valeurs portées dans les équations, on trouve un système d'erreurs ou résidus :

$$ax + by + \ldots - n = \varepsilon$$
$$a'x + b'y + \ldots - n' = \varepsilon'$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

et on sait que les probabilités $p, p', p'', \ldots$ pour que ces erreurs ou résidus soient compris entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, ε' et $\varepsilon' + d\varepsilon'$, ... sont, dans le cas général des mesures de précision h différentes :

$$p = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \qquad p' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\varepsilon'^2} d\varepsilon' \ldots$$

Appliquons, en l'étendant au cas actuel, le principe de la probabilité composée. La probabilité de l'existence simultanée de ces erreurs aura pour expression :

$$pp'p'' \ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \ldots e^{-h^2\varepsilon^2 - h'^2\varepsilon'^2 - \ldots} d\varepsilon d\varepsilon' d\varepsilon'' \ldots$$

[1] Mémoires traduits par J. Bertrand.

[2] Théorie analytique des probabilités (1812).

Or, en vertu de la règle de Bayes, parmi tous les systèmes de valeurs de $(x, y, \ldots)$ causes des erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$, le plus probable est celui qui répond à l'événement le plus probable, c'est-à-dire à la plus petite valeur de : $h^2\varepsilon^2 + h'^2\varepsilon'^2 + \ldots$

ou au minimum de la somme des carrés des résidus multipliés par les modules de précision des observations. Si ces modules sont égaux, on retombe sur les équations finales de Legendre.

Donc, si les différentes observations peuvent être considérées comme également précises, on rendra minima la somme des carrés des erreurs. Sinon, il faudra introduire les modules de précision et rendre minima la somme $\Sigma h^2\varepsilon^2$.

Si la résolution du système des équations (5) obtenu par cette méthode ne donne pas des résultats qui puissent être considérés comme suffisamment exacts[1], on se servira de ces valeurs approchées pour obtenir un nouveau système d'équations linéaires, analogue au précédent, qui donnera de nouvelles valeurs des inconnues correspondant mieux au minimum de la somme des carrés des erreurs. On pourra ainsi appliquer la méthode plusieurs fois de suite, jusqu'à ce que les résultats obtenus puissent être considérés comme satisfaisants.

Nous avons supposé jusqu'ici que la forme de la fonction choisie se prêtait à un ajustement convenable. Cette fonction (1) interpolatrice : $v_x = f(x)$ a été choisie arbitrairement; l'analyste n'est guidé dans ce choix

[1] Car on a négligé dans le développement (4) les termes du 2e degré par rapport aux inconnues.

que par l'allure de la table étudiée, par la forme de la courbe qui en a été déduite. Il nous reste à passer en revue les différentes équations de survie qui ont été proposées, et par le moyen desquelles on a réussi à interpoler la plupart des tables existantes.

D. — ÉQUATIONS DE SURVIE

Pour que l'expression analytique d'une loi de survie puisse être de quelque utilité, il est nécessaire que le nombre des constantes qui y sont contenues soit très limité. Les formules d'interpolation usuelles, telles que celles de Newton, Lagrange, conduiraient à des expressions beaucoup trop compliquées, tandis que les meilleures équations de survie connues, celle de Makeham en particulier, sont d'une forme très simple et contiennent un très petit nombre de constantes, tout en interpolant très fidèlement les tables d'expérience sur de longues périodes.

Dans une remarquable thèse insérée dans le *Bulletin de l'Institut des actuaires français* (4e année, n° 14), M. Albert Quiquet fait observer que « deux influences ont guidé, plus ou moins consciemment, les actuaires qui ont interpolé des tables de survie ». Les uns ont cherché à englober dans une formule le plus grand nombre possible de résultats empiriques « par des tâtonnements, par des altérations successives des constantes[1] ». Les autres se sont efforcés d'extraire des

[1] QUIQUET, 1.

tables numériques qu'ils avaient entre les mains une loi simple, qui, au moyen d'une analyse algébrique, les conduisît à une expression satisfaisante. La seconde méthode est bien plus féconde que la première, les formules sont plus simples, les constantes moins nombreuses, et l'étude de l'équation obtenue peut faire découvrir des propriétés importantes qui pourront apporter des simplifications considérables aux calculs viagers.

Formule de Moivre. — C'est ainsi que de Moivre, remarquant que, dans la table de Halley (dressée en 1693), les nombres de survivants décroissaient, à plusieurs reprises, en progression arithmétique, proposa de supposer la raison de cette progression constante et égale à 1, l'âge final étant 86, ce qui le conduisit à la formule

$$v_x = 86 - x,$$

v_x étant le nombre des vivants à l'âge x.

Le nombre des vivants à l'âge x est égal au complément à 86 du nombre x. La vie probable et la vie moyenne sont toutes deux égales à la moitié du nombre des vivants.

Grâce à son extrême simplicité et malgré l'inexactitude de l'hypothèse de de Moivre, cette formule rendit des services importants à une époque où les résultats statistiques faisaient presque complètement défaut. Elle permit d'abréger et de simplifier considérablement les calculs viagers, et Baily et Maas en tirèrent parti avantageusement.

Polynômes. — La forme linéaire fut néanmoins rapidement abandonnée, et, dès 1765, Lambert, uti-

lisant les données fournies par les registres de mortalité de la ville de Londres de 1753 à 1758, représente le nombre des vivants à l'âge x, compris entre 45 et 90 ans, au moyen d'un polynôme du 5e degré en x de la forme :

$$v_x = a + b(x - 45) + c(x - 45)^2 + d(x - 45)^3 \\ + e(x - 45)^4 + f(x - 45)^5.$$

Thomas Young et Littrow ont, eux aussi, essayé d'interpoler plus tard les tables anglaises au moyen de fonctions entières en x, et Babbage, en 1823, a donné la formule du 2e degré :

$$v_x = 6199{,}8 - 9{,}29\frac{x}{1} - 1{,}5767\frac{x(x-1)}{1.2},$$

qui s'applique à la table suédoise.

Dans ces divers essais, on peut voir des applications de la méthode que M. Quiquet nomme méthode a posteriori.

Fonction exponentielle. — Mais bientôt certains actuaires furent frappés de l'analogie qui existe entre les courbes de mortalité et la courbe qui représente les variations de la fonction exponentielle : $y = a^x$, a étant supposé inférieur à 1. Cette dernière courbe est bien asymptote à l'axe des abscisses, tandis que le nombre des vivants devient nul pour une valeur de x relativement faible : 90 ou 100. Mais on peut choisir a de telle sorte que la courbe se rapproche rapidement de son asymptote et limiter l'application de la formule à un âge convenable, 70 ou 80 ans par exemple.

Une objection plus grave résulte de ce que, si le nombre des vivants était lié à l'âge par l'équation :

$$v_x = a^x,$$

le taux annuel de mortalité :

$$\frac{a^x - a^{x+1}}{a^x} = 1 - a,$$

serait constant et indépendant de l'âge. Or toutes les tables de mortalité nous indiquent le contraire. Le taux annuel de mortalité décroît du commencement de la vie jusqu'à l'âge de 25 ou 30 ans environ et croît ensuite. La relation simple

$$v_x = a^x$$

ne saurait donc convenir.

Mais en combinant entre elles des exponentielles, peut-être pourrait-on arriver à une représentation algébrique satisfaisante de la loi de survie.

Loi de Sang. — Sang propose la formule

$$v_x = a + bc^x.$$

Le taux annuel de mortalité n'est plus constant, et on pourra déterminer a, b, c, de façon qu'il croisse avec l'âge. Il deviendra alors possible de représenter au moyen d'une telle fonction le nombre des survivants à partir de l'âge où le taux de mortalité passe par un minimum.

La loi de Sang joint d'une propriété importante. Si l'on considère en effet un groupe de k têtes d'âges :

$$x_1, x_2, \ldots x_k,$$

la probabilité pour que l'une au moins de ces têtes soit vivante dans n années est :

$$\mathrm{I} - b\frac{c^{x_1} - c^{x_1+n}}{a + bc^{x_1}} \cdot b\frac{c^{x_2} - c^{x_2+n}}{a + bc^{x_2}} \cdots b\frac{c^{x_k} - c^{x_k+n}}{a + bc^{x_k}}$$

$$= \mathrm{I} - b^k(\mathrm{I} - c^n)^k \frac{c^{x_1+x_2+\ldots+x_k}}{(a + bc^{x_1})\ldots(a + bc^{x_k})}$$

Comparons ce groupe à un groupe de k têtes toutes du même âge ξ ; la probabilité pour qu'une au moins de ces nouvelles têtes soit vivante dans n années est :

$$\mathrm{I} - b^k(\mathrm{I} - c^n)^k \frac{c^{k\xi}}{(a + bc^{\xi})^k}.$$

Ces deux probabilités sont égales si la relation suivante est vérifiée :

$$\frac{c^{k\xi}}{(a + bc^{\xi})^k} = \frac{c^{x_1+x_2+\ldots+x_k}}{(a + bc^{x_1})\ldots(a + bc^{x_k})}.$$

La relation précédente, indépendante de n, permet de déterminer ξ en fonction de $(x_1, x_2, \ldots x_k)$, et le groupe donné, considéré comme s'éteignant au dernier décès, aura la même probabilité de survivre après un temps quelconque que le groupe composé des k têtes d'âge ξ. Ce deuxième groupe pourra être substitué au premier dans les calculs, ce qui constituera une importante simplification.

Cette propriété est vérifiée également pour la loi de Moivre ; la relation qui détermine ξ est alors la suivante :

$$(86 - \xi)^k = (86 - x_1)(86 - x_2)\ldots(86 - x_k),$$

ou, en désignant par χ, X_1, X_2, ... X_k les compléments d'âge :

$$\log \chi = \frac{1}{k} \sum_1^k \log X_i.$$

M. Poterin du Motel a démontré (*Bulletin de l'Institut des actuaires français*, année 1896, n° 24) que cette propriété n'appartient qu'aux lois de Moivre et de Sang.

Fonction linéaire d'exponentielles. — M. Laurent a étudié la représentation analytique de lois de survie au moyen d'équations telles que :

$$v_x = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + \dots$$

et il a indiqué, dans le n° 8 du *Bulletin de l'Institut des actuaires français*, un procédé élégant pour l'interpolation d'une fonction $f(x)$ au moyen d'une fonction linéaire d'exponentielles.

Si l'on considère en effet la fonction :

$$f(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{\alpha^x - \alpha^a} \qquad (1)$$

on remarque que l'expression:

$$f(a) + (\alpha^x - \alpha^a) f(a, x)$$

se réduit à $f(a)$ pour $x = a$ et à $f(b)$ pour $x = b$.

Si l'on pose :

$$f(a, b, x) = \frac{f(a, x) - f(a, b)}{\beta^x - \beta^b}, \qquad (2)$$

on obtient, en combinant (1) et (2) :

$$f(a, x) = \frac{f(x) - f(a)}{\alpha^x - \alpha^a} = f(a, b) + (\beta^x - \beta^b)\, f(a, b, x)$$

$$f(x) = f(a) + (\alpha^x - \alpha^a) f(a, b) + (\alpha^x - \alpha^a)(\beta^x - \beta^b) f(a, b, x)$$

L'expression :

$$f(a)+(\alpha^x-\alpha^a)\,f(a,b)+(\alpha^x-\alpha^a)\,(\beta^x-\beta^b)\,f(a,b,x)$$

se réduit à $f(a)$ pour $x=a$, à $f(b)$ pour $x=b$ et à $f(c)$ pour $x=c$.

On peut continuer ainsi; on obtient successivement :

$$f(x)=f(a)+(\alpha^x-\alpha^a)\,f(a,x)$$

$$f(x)=f(a)+(\alpha^x-\alpha^a)f(a,b)+(\alpha^x-\alpha^a)(\beta^x-\beta^b)f(a,b,x).$$

$$f(x)=f(a)+(\alpha^x-\alpha^a)f(a,b)+(\alpha^x-\alpha^a)(\beta^x-\beta^b)f(a,b,c)$$
$$+(\alpha^x-\alpha^a)\,(\beta^x-\beta^b)\,(\gamma^x-\gamma^c)\,f(a,b,c,x).$$

. . . .

Si la première formule d'interpolation n'est pas satisfaisante, on passe à la seconde, puis à la troisième, etc.; mais, comme le fait observer M. Laurent, « les calculs déjà faits ne sont pas inutiles, » puisqu'il suffit d'y ajouter des termes de correction, et l'indétermination de α, β, γ, ... permet d'attribuer à $f(x)$ de nouvelles valeurs arbitraires.

Lambert et Duvillard ont étudié des formules de survie qui se présentent sous la forme d'une somme d'un polynôme entier et d'exponentielles. Lambert a interpolé la table de Süssmilch au moyen de l'équation :

$$v_x=1000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2-6176\left(e^{-\frac{x}{13,682}}-e^{-\frac{x}{2,43114}}\right),$$

qu'il applique de o à 95 ans.

Enfin, on peut prendre pour fonction interpolatrice un produit d'exponentielles :

$$v_x=e^{A+Bx+Cx^2+\ldots}$$

Nous rencontrerons des fonctions de cette nature un peu plus loin, lorsque nous ferons l'exposé sommaire de la généralisation, due à M. Quiquet, des lois de Gompertz et de Makeham. Mais, auparavant, il est nécessaire d'étudier les propriétés de ces deux célèbres lois.

Lois de Gompertz et de Makeham. — En 1825, l'actuaire anglais Gompertz propose de représenter la loi de survie par la formule :

$$v_x = kg^{c^x},$$

au moyen de laquelle il interpole d'une manière satisfaisante la table de Carlisle.

En 1860, un autre actuaire anglais, Makeham, obtient une expression plus satisfaisante encore :

$$v_x = ks^x g^{c^x},$$

qui a servi à interpoler les plus récentes tables d'expérience à partir de l'âge pour lequel se produit le minimum du taux annuel de mortalité dont il a été question plus haut.

Gompertz[1] et Makeham attribuent la mort à deux causes. La première est le hasard, qui frappe aussi bien les personnes jeunes que les vieillards. Si le hasard agissait seul, le nombre des décès à chaque âge

[1] Gompertz : « La mort est considérée comme pouvant être le résultat de deux causes générales indépendantes : l'une consisterait dans le hasard, dans les accidents qui peuvent priver de la vie une personne encore en parfaite santé; l'autre est la vieillesse, qui affaiblit graduellement tout individu. »

serait simplement proportionnel au nombre des vivants à cet âge, et l'on aurait successivement :

$$v_1 = v_0 - hv_0 = v_0(1 - h)$$

$$v_2 = v_1 - hv_1 = v_0(1 - h)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_x = v_0(1 - h)^x$$

La table de survie serait une simple progression géométrique décroissante de raison $(1 - h)$.

La seconde cause de mort est l'affaiblissement progressif de nos organes avec l'âge, la diminution de notre force vitale, qui produit un accroissement correspondant de l'intensité de la mortalité. Cette intensité est, en effet, beaucoup plus grande pour un groupe de vieillards atteints d'artério-sclérose, perclus de rhumatismes, que pour un groupe de jeunes gens aux organes sains et vigoureux. Si on admet, avec Gompertz, que cette intensité de mortalité m s'accroît proportionnellement au temps et à sa propre valeur, dans un intervalle dx infiniment petit, on aura :

$$dm = \log c \,.\, m \,.\, dx,$$

en désignant par $\log c$ le coefficient de proportionnalité; ou, en intégrant :

$$\log m = x \log c + \log \mu;$$

c'est-à-dire : $$m = \mu c^x.$$

Négligeant dans le phénomène la part due au hasard, Gompertz s'en tint à cette expression de l'intensité, ou du taux instantané de mortalité. Makeham, reprenant l'hypothèse complète, ajouta à m pour obtenir ce

taux de mortalité une constante ν, destinée à représenter l'action du hasard, indépendante de l'âge. Il obtint ainsi :

$$\varkappa_x = \mu c^x + \nu,$$

loi analogue pour les taux de mortalité à celle que Sang avait proposée comme loi de survie.

Mais on sait que : $\varkappa_x = -\frac{dv_x}{v_x}$.

On obtient donc : $-\frac{dv_x}{v_x} = \mu c^x + \nu$.

L'intégration de cette expression donne[1] :

$$v_x = e^{\lambda - \nu x - \frac{\mu c^x}{\log c}},$$

ou, en posant :

$$e^\lambda = k \quad e^{-\nu} = s \quad e^{-\frac{\mu}{\log c}} = g$$

$$v_x = ks^x g^{c^x},$$

forme sous laquelle on présente généralement la loi de Makeham. La loi de Gompertz s'obtient en faisant dans cette expression $\nu = 0$, ou $s = 1$, ce qui donne :

$$v_x = kg^{c^x}.$$

Gompertz a fait l'application de sa formule aux tables de Northampton, Deparcieux, Carlisle, à la table suédoise. Elle interpole assez exactement ces tables pour des périodes plus ou moins étendues, d'une cinquantaine d'années au maximum, sans que l'on ait besoin de changer la valeur des constantes.

[1] Le signe log représente, ici et dans les pages suivantes, des logarithmes népériens.

Makeham et Woolhouse ont interpolé, au moyen de l'équation :

$$v_x = ks^x g^{c^x},$$

à peu près toutes les tables connues, à partir de l'âge pour lequel le taux de mortalité annuel est minimum jusqu'à la limite extrême de la vie.

Il est facile de voir en effet que la formule de Makeham, pas plus que celle de Gompertz, ne peut s'adapter à une table de mortalité comprenant l'existence entière. Toutes les tables de taux de mortalité font ressortir l'existence d'un minimum pour un âge compris entre 15 et 30 ans. La quantité $q_x = 1 - \frac{v_{x+1}}{v_x}$ présentant un minimum, la quantité $1 - q_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}$ devrait présenter un maximum.

Or, si la loi de Makeham est supposée vérifiée, on a :

$$\frac{v_{x+1}}{v_x} = sg^{(c-1)c^x},$$

expression qui varie toujours dans le même sens.

Gompertz chercha à éviter cet inconvénient et à représenter l'existence entière au moyen d'une formule unique en supposant les quantités k et c fonctions de x. Le cadre de cet ouvrage ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ce sujet.

Calcul des constantes. — Reprenons la loi de Makeham : $v_x = ks^x g^{c^x}$.

Comment, étant donnée une table de mortalité, calculera-t-on les constantes k, s, g, c, qui lui conviennent ? Remarquons d'abord que si s, g, c sont

connus, la valeur de k pourra être choisie arbitrairement.

Considérons des têtes d'âge x satisfaisant à la loi :

$$v_x = ks^x g^{c^x}$$

$$\log v_x = \log k + x \log s + c^x \log g.$$

Prenons la différence première, puis la différence seconde de $\log v_x$:

$$\log p_x = \Delta_1 \log v_x = \log v_{x+1} - \log v_x$$
$$= \log s + c^x (c - 1) \log g \qquad (1)$$
$$\Delta_1 \log p_x = \Delta_2 \log v_x = \log p_{x+1} - \log p_x$$
$$= c^x (c - 1)^2 \log g. \qquad (2)$$

De même :

$$\Delta_1 \log p_{x+1} = c^{x+1} (c - 1)^2 \log g.$$

On en déduit : $c = \dfrac{\Delta_1 \log p_{x+1}}{\Delta_1 \log p_x}$.

Les observations donnent les taux annuels de mortalité, tels que $(1 - p_x)$:

$$\Delta_1 \log p_{x+1} = \log p_{x+2} - \log p_{x+1}$$
$$\Delta_1 \log p_x = \log p_{x+1} - \log p_x.$$

Connaissant les taux annuels de mortalité à trois âges consécutifs $x, x+1, x+2$, on en déduira c. Lorsque c sera calculé, on tirera de la relation (2) la valeur de g, et de la relation (1) celle de s.

On aura donc autant de valeurs des constantes que de séries de trois observations, et on pourra traiter les relations obtenues par la méthode des moindres carrés ou une méthode analogue pour en déduire les valeurs les plus convenables à adopter pour s, g, c.

Au lieu de considérer les différences des logarithmes des probabilités annuelles, on pourrait considérer les différences des logarithmes des probabilités de vie après t années :

$$\log p_{x+t}^{t} - \log p_{x}^{t},$$

et c'est ainsi que MM. Hardy et King ont calculé les valeurs des constantes de la formule applicable à la table anglaise. Les résultats sont tout à fait analogues[1] :

$$c^{t} = \frac{\Delta_1 \log p_{x+t}^{t}}{\Delta_1 \log p_{x}^{t}} = \frac{\log p_{x+2t}^{t} - \log p_{x+t}^{t}}{\log p_{x+t}^{t} - \log p_{x}^{t}}.$$

Loi du vieillissement uniforme. — Non seulement la loi de Makeham a permis d'interpoler la plupart des tables de mortalité existantes depuis un âge relativement peu élevé (20 ou 25 ans), jusqu'à la fin de l'existence humaine, mais encore elle jouit d'une propriété fort importante, de nature à simplifier considérablement les calculs viagers sur plusieurs têtes, pro-

[1] Si t est égal au tiers du nombre des âges observés qui s'étendent de l'âge a à l'âge $(a+3t)$, la formule de MM. King et Hardy s'écrit :

$$c^{t} = \frac{\sum_{a+2t}^{a+3t-1} \log p_x - \sum_{a+t}^{a+2t-1} \log p_x}{\sum_{a+t}^{a+2t-1} \log p_x - \sum_{a}^{a+t-1} \log p_x}.$$

Car : $$p_{a}^{t} = p_{a} \cdot p_{a+1} \cdot p_{a+2} \cdots p_{a+t-1}$$

et : $$\log p_{a}^{t} = \sum_{a}^{a+t-1} \log p_{x}.$$

(Voir, pour l'évaluation de l'erreur commise sur la valeur de c par l'application de cette formule, la note publiée par M. Galbrun dans le *Bulletin de l'Institut des actuaires français*, n° 67, décembre 1906.)

priété qui n'est partagée que par la loi de Gompertz et par la loi : $v_x = e^{A + Bx + Cx^2}$,

qui sont toutes deux des cas limites de la loi de Makeham.

Cette propriété est connue sous le nom de *loi de vieillissement uniforme ;* elle a été signalée par de Morgan, en 1839, pour la loi de Gompertz et peut s'énoncer ainsi :

La probabilité de l'existence au bout d'un temps quelconque d'un groupe s'éteignant au premier décès est constamment égale à la probabilité de vie au bout du même temps d'un autre groupe composé de têtes du même âge, cet âge étant convenablement choisi. Si le premier groupe est soumis à la loi de Makeham, les deux groupes comprennent le même nombre de têtes; s'il est soumis à la loi de Gompertz, le deuxième se réduit à une seule tête.

Supposons le groupe donné composé de l têtes d'âges $x_1, x_2, \ldots x_l$ soumises à la loi de Makeham. La probabilité de vie de la tête x_1 au bout du temps t est :

$$\frac{v_{x_1+t}}{v_{x_1}} = s^t g^{c^{x_1}(c^t-1)},$$

et la probabilité de vie du groupe considéré au bout du même temps est :

$$p^t_{x_1 x_2 \ldots\ldots x_l} = s^{lt}\, g^{(c^t-1)(c^{x_1}+\ldots+c^{x_l})}. \qquad (1)$$

La probabilité de vie d'un nouveau groupe, composé de λ têtes de même âge ξ, au bout du même temps t s'écrit :

$$p_{\xi\xi \ldots \xi}^{t} = s^{\lambda t}\, g^{(c^t-1)\lambda c^{\xi}}. \qquad (2)$$

On aperçoit immédiatement que si les égalités :

$$\begin{cases} \lambda = l & (3) \\ \lambda c^{\xi} = c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_l} & (4) \end{cases}$$

sont vérifiées, les deux probabilités précédentes sont égales quel que soit le temps t choisi, et les deux groupes ont la même probabilité de survivre après un temps quelconque.

Si n années après, le groupe primitif ayant survécu, on veut effectuer le même calcul, c'est-à-dire chercher l'âge unique ξ' des l têtes qui pourront être substituées aux têtes d'âges $(x_1 + n, \dots x_l + n)$, on remarque que :

$$p^{t}_{x_1+n, \dots, x_l+n} = \frac{p^{n+t}_{x_1 x_2 \dots x_l}}{p^{n}_{x_1 x_2 \dots x_l}} = \frac{p^{n+t}_{\xi\xi \dots \xi}}{p^{n}_{\xi\xi \dots \xi}} = p^{t}_{\xi+n, \dots \xi+n}.$$

L'âge de substitution cherché ξ' est donc égal à $\xi + n$, et il sera inutile d'effectuer un nouveau calcul pour le trouver; il suffira d'ajouter le temps écoulé n à l'âge obtenu précédemment : le vieillissement des têtes substituées est le même que celui des têtes primitives (vieillissement uniforme).

Si les têtes du groupe donné obéissent à la loi de Gompertz, les relations (1) et (2) prennent la forme :

$$p^{t}_{x_1 x_2 \dots x_l} = g^{(c^t - 1)(c^{x_1} + \dots + c^{x_l})} \qquad (1)'$$

$$p^{t}_{\xi\xi \dots \xi} = g^{(c^t - 1)\lambda c^{\xi}} \qquad (2)'$$

On peut égaler ces deux expressions en donnant à λ une valeur arbitraire, 1 par exemple. La relation (4) s'écrit :

$$c^{\xi} = c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_l} \qquad (4)'$$

et la propriété énoncée plus haut est démontrée.

Enfin, si les têtes du groupe donné obéissent à la loi

$$v_x = e^{A + Bx + Cx^2},$$

les relations (1) et (2) deviennent :

$$p^t_{x_1 x_2 \dots x_l} = e^{l(Bt + Ct^2) + 2Ct(x_1 + \dots + x_l)} \qquad (1)''$$

$$p^t_{\xi\xi \dots \xi} = e^{\lambda(Bt + Ct^2) + 2Ct\lambda\xi} \qquad (2)''$$

Pour que les deux probabilités qui précèdent soient égales, il faut que les deux groupes comprennent un même nombre de têtes et que l'âge des têtes substituées ξ soit égal à la moyenne arithmétique des âges des têtes du groupe initial.

On voit aisément quelle importante simplification résulte de la loi du vieillissement uniforme pour les calculs viagers concernant un groupe. Quand on doit effectuer un calcul relatif à un groupe de l têtes d'âges divers, satisfaisant toutes à la loi de Makeham, ce groupe s'éteignant au premier décès (on sait que l'on est toujours ramené à ce cas)[1], on peut lui substituer un groupe de l têtes du même âge ξ facile à calculer. Le nombre des tables numériques nécessaires se trouvera ainsi considérablement réduit, et les tables relatives à l têtes du même âge suffiront pour effectuer tous les calculs relatifs à des groupes de l têtes d'âges différents.

Si la loi admise est celle de Gompertz, les tables relatives à une seule tête suffiront à effectuer les calculs relatifs à des groupes quelconques.

[1] Car les probabilités relatives à des groupes s'éteignant au dernier décès s'expriment linéairement en fonction de probabilités analogues relatives à des groupes s'éteignant au premier décès.

De plus, lorsque d'année en année, lors des inventaires, on aura à renouveler, pour les différents groupes de têtes assurées, des calculs analogues à ceux qui ont été précédemment faits, il sera inutile de calculer à nouveau l'âge de substitution, puisque, d'après la loi du vieillissement uniforme, cet âge se déduira de l'âge calculé l'année précédente en y ajoutant simplement l'unité.

Il reste à montrer comment on peut calculer l'âge de substitution ξ. Si la loi de survie est de la forme

$$v_x = e^{A + Bx + Cx^2},$$

cet âge est, comme on l'a vu, la moyenne arithmétique des âges du groupe.

Si la loi de survie adoptée est celle de Makeham, on calcule ξ par la relation

$$\overset{t}{p}_{\xi\xi \dots \xi} = \overset{t}{p}_{x_1 x_2 \dots x_l},$$

qui s'écrit :

$$l \log \overset{t}{p}_{\xi} = \log \overset{t}{p}_{x_1} + \log \overset{t}{p}_{x_2} + \dots + \log \overset{t}{p}_{x_l}.$$

On donne à t une valeur arbitraire, et on utilise soit une table des probabilités de vie au bout de ce temps, soit, mieux, une table des logarithmes de ces quantités.

Si l'on dispose d'une table de taux instantanés, on calcule ξ au moyen de la relation (4) :

$$lc^{\xi} = c^{x_1} + c^{x_2} + \dots + c^{x_l},$$

dans laquelle on a substitué aux quantités c^x leurs expressions en fonction des taux instantanés $\varkappa$. On sait que :

$$\varkappa_x = \mu c^x + \nu,$$

et la relation (4) devient :

$$l\varkappa_{\xi} = \varkappa_{x_1} + \varkappa_{x_2} + \dots + \varkappa_{x_l}.$$

De même la relation (4)′ s'écrit :

$$x_\xi = x_{x_1} + x_{x_2} + \dots + x_{x_l}.$$

Il suffit donc de prendre la moyenne arithmétique de l taux instantanés ou d'en faire la somme, suivant la loi choisie, pour obtenir le taux correspondant à l'âge ξ cherché, et partant, au moyen de la table, cet âge ξ lui-même.

Les tables de mortalité en usage actuellement en France dans les Compagnies d'assurances (tables AF et RF) ont été ajustées à partir de l'âge de 25 ans au moyen de la formule de Makeham. Il en résulte que les considérations qui précèdent sont d'une importance capitale, les calculs basés sur la loi du vieillissement uniforme étant d'un usage courant.

Généralisation de M. Quiquet. — Nous n'avons étudié ici que les principales et les plus connues des équations de survie. Nous avons, à dessein, laissé de côté les travaux intéressants d'une foule de mathématiciens et d'actuaires : Bernoulli, d'Alembert, Baily, Maas, Young, Thiele, Lazarus, Dormoy, etc., estimant que l'étude de ces travaux sortirait du cadre de ce traité. Nous renvoyons ceux de nos lecteurs que cette étude intéresserait à l'aperçu historique[1] qui termine la remarquable thèse de M. Quiquet, déjà citée, et auquel nous avons fait de larges emprunts.

Mais nous ne saurions abandonner ce chapitre sans donner une analyse sommaire des travaux de M. Quiquet sur la question, trop heureux si cet exposé, forcément très succinct et très incomplet, inspire à nos

[1]. Quiquet, 1.

lecteurs le désir d'en admirer, par une étude plus approfondie, la fécondité et l'ampleur.

M. Quiquet se propose d'abord de résoudre un problème de probabilités qui le conduit à l'expression générale des divers ordres de fonctions de survie, et qu'il énonce ainsi[1] :

La probabilité de survie au bout du temps t d'un groupe s'éteignant au premier décès et composé de N têtes, d'âges $(a, b, \dots k)$, qui obéissent toutes à la même loi de mortalité, est :

$$\frac{v_{a+t}}{v_a} \cdot \frac{v_{b+t}}{v_b} \cdots \frac{v_{k+t}}{v_k}.$$

Cette expression dépend des N quantités $(a, b, \dots k)$ ou, si l'on veut, de N fonctions $(\alpha, \beta, \dots \theta)$ de celles-ci. Existe-t-il des formes particulières de v_x telles que n seulement de ces fonctions $(\alpha, \beta, \dots \theta)$ soient indépendantes entre elles et indépendantes de t, n étant un nombre inférieur à N ?

Si une telle forme de v_x existe, la relation :

$$\frac{v_{a+t}}{v_a} \cdot \frac{v_{b+t}}{v_b} \cdots \frac{v_{k+t}}{v_k} = G(\alpha, \beta, \dots \zeta, t) \quad (1)$$

sera vérifiée quel que soit t, $(\alpha, \beta, \dots \zeta)$ étant des fonctions de $(a, b, \dots k)$ au nombre de n indépendantes entre elles.

La relation (1) peut s'écrire, en prenant les dérivées logarithmiques par rapport à t des deux membres :

$$\frac{v'_{a+t}}{v_{a+t}} + \frac{v'_{b+t}}{v_{b+t}} + \dots + \frac{v'_{k+t}}{v_{k+t}} = \frac{G'_t(\alpha, \beta, \dots \zeta, t)}{G(\alpha, \beta, \dots \zeta, t)},$$

ou : $\varkappa_{a+t} + \varkappa_{b+t} + \dots + \varkappa_{k+t} = F(\alpha, \beta, \dots \zeta, t)$.

[1] Quiquet, 2.

Cette relation étant vérifiée quel que soit t, nous pouvons égaler les n premières dérivées des deux membres prises par rapport à t, après y avoir fait $t=0$, ce qui donne le système :

$$
\begin{aligned}
x_a + x_b + \dots + x_k &= F_0 \\
x'_a + x'_b + \dots + x'_k &= F_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_a^{(n)} + x_b^{(n)} + \dots + x_k^{(n)} &= F_n.
\end{aligned}
$$

F_0, F_1, ... F_n sont les résultats de la substitution de o à t dans les n premières dérivées de F par rapport à t.

Les seconds membres dépendent, par hypothèse, de n variables indépendantes $(\alpha, \beta, \dots \zeta)$. Ils sont au nombre de $(n+1)$, donc il existe une relation entre eux et, par suite, entre les premiers membres. Or la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une relation indépendante des variables entre ces $(n+1)$ fonctions des n variables indépendantes $(\alpha, \beta, \dots \zeta)$, est que tous les jacobiens de ces $(n+1)$ fonctions pris par rapport à $(n+1)$ des N variables primitives $(a, b, \dots k)$ soient nuls.

Ainsi le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
x'_a & x'_b & \dots\dots \\
x''_a & x''_b & \dots\dots \\
\dots & \dots & \dots\dots \\
x_a^{(n+1)} & x_b^{(n+1)} & \dots
\end{vmatrix}
$$

est identiquement nul, et il existe une même relation

linéaire et homogène entre tous les éléments de chacune de ces colonnes. Soit :

$$A_0 \varkappa'_a + A_1 \varkappa''_a + \dots + A_n \varkappa_a^{(n+1)} = 0$$

cette relation pour la première colonne. Elle est vérifiée quand on y remplace a par l'une quelconque des variables $b, c, \dots,$ qui entrent dans le déterminant considéré, et, si l'on forme d'autres déterminants fonctionnels, on voit qu'elle est vérifiée quand on y remplace a par l'une quelconque des N variables $(a, b, \dots\dots k)$.

Les conditions énoncées se réduisent à la seule équation :

$$A_0 \varkappa'_x + \dots + A_n \varkappa_x^{(n+1)} = 0,$$

qui doit être satisfaite quel que soit x, A_0, A_1, ... A_n étant indépendants de x, c'est-à-dire constants, mais non tous nuls à la fois.

Si l'on pose. $\varkappa'_x = y$,

le problème est ramené à l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients constants, sans second membre :

$$A_0 y + A_1 y' + \dots + A_n y^{(n)} = 0. \qquad (2)$$

Si $n = 0$, $y = 0$; d'où : $\varkappa_x = -B$ et $v_x = e^{A+Bx}$, formule donnée par Dormoy.

On sait que si n est supérieur à zéro, l'intégrale générale de l'équation (2) est de la forme

$$y = e^{r_1 x} \varphi_1(x) + e^{r_2 x} \varphi_2(x) + \dots + e^{r_j x} \varphi_j(x),$$

r_i étant une racine de degré de multiplicité λ_i de l'équation caractéristique

$$A_0 + A_1 r + \dots + A_n r^n = 0,$$

et $\varphi_i(x)$ un polynôme arbitraire entier de degré $(\lambda_i - 1)$.

Quand y est connu, on en déduit facilement v_x, car :

$$y = \varkappa'_x \qquad \varkappa_x = \int y dx.$$

Mais $\frac{v'_x}{v_x} = -\varkappa_x$, d'où $v_x = e^{-\int \varkappa_x dx} = e^{-\iint y dx^2}$.

Dans le cas général, $y = \Sigma e^{r_i x} \varphi_i(x)$,

$$\varkappa_x = \int y dx = \Sigma \int e^{r_i x} \varphi_i(x) \, dx.$$

Si r_i est nul, $\varkappa_x = \psi_i(x)$,

le degré de $\psi_i(x)$ dépassant d'une unité celui de $\varphi_i(x)$.

Si r_i est différent de zéro,

$$\int e^{r_i x} \varphi_i(x) \, dx = -e^{r_i x} \chi_i(x),$$

$\chi_i(x)$ étant une fonction entière et rationnelle du degré de φ_i.

$$\varkappa_x = -B - \Sigma e^{r_i x} \chi_i(x),$$

$$\int \varkappa_x dx = -\int B dx - \Sigma \int e^{r_i x} \chi_i(x) dx$$

$$= -A - Bx - \Sigma e^{r_i x} f_i(x),$$

$$v_x = e^{A + Bx + \Sigma e^{r_i x} f_i(x)}. \qquad (4)$$

M. Quiquet montre que, quel que soit r_i, $f_i(x)$ n'a que λ_i termes, et $\Sigma e^{r_i x} f_i(x)$ renferme seulement n coefficients indépendants de x et des quantités r_i. Il donne à la fonction v_x définie par la relation (4) le nom de *fonction de survie d'ordre* n.

Applications. — *Fonctions de survie du premier ordre*. — L'équation caractéristique est :

$$A_0 + A_1 r = 0.$$

1° Si $r = 0$, $y = -C_1$ $\varkappa_x = -B - C_1 x$,

$$v_x = e^{A + Bx + Cx^2} \text{ (loi étudiée page 67).}$$

2° Si $r \lessgtr 0$, $y = -C_1 e^{rx}$ $\varkappa_x = -B - \frac{C_1}{r} e^{rx}$,

$$v_x = e^{A + Bx + Ce^{rx}}.$$

C'est la loi de Makeham si $B \neq 0$, et celle de Gompertz si $B = 0$.

Fonctions de survie du deuxième ordre. — L'équation caractéristique est :

$$A_0 + A_1 r + A_2 r^2 = 0.$$

Soit r_1 et r_2 ses racines. Il y a quatre cas à distinguer :

1° $r_1 = r_2 = 0$.

$$y = C_1 + C_2 x \qquad \varkappa_x = -B + C_1 x + \frac{C_2}{2} x^2,$$

$$v_x = e^{A + Bx + Cx^2 + Dx^3};$$

2° $r_1 \neq 0$ $r_2 = 0$,

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \qquad \varkappa_x = -B + C_2 x + \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 x}.$$

$$v_x = e^{A + Bx + Cx^2 + De^{r_1 x}}.$$

Makeham a donné cette formule sous le nom de *second développement de la loi de Gompertz.*

3° $r_1 = r_2 \neq 0$,

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

$$\varkappa_x = -B + \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 x} - \frac{C_2}{r_1^2} e^{r_1 x} + \frac{C_2}{r_1} x e^{r_1 x},$$

$$v_x = e^{A + Bx + (C + Dx)e^{r_1 x}};$$

4° $r_1 \neq r_2$, aucune des deux quantités r_1 et r_2 n'étant nulle,

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

$$\varkappa_x = -B + \frac{C_1}{r_1} e^{r_1 x} + \frac{C_2}{r_2} e^{r_2 x},$$

$$v_x = e^{A + Bx + Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}}.$$

Cette formule a été donnée par Lazarus.

Ce rapide exposé suffit à montrer tout l'intérêt que peut présenter une aussi heureuse généralisation M. Quiquet en déduit une méthode pour rechercher la forme et les paramètres de la fonction interpolatrice d'une table de survie donnée. Ainsi, si cette dernière est telle que les différences secondes du logarithme de v_x sont en progression géométrique, la fonction interpolatrice est du premier ordre[1]. Et Makeham a montré comment on pouvait ramener à ce cas celui où les différences secondes du logarithme de v_x sont *à peu près* en progression géométrique.

M. Quiquet est ensuite amené à rechercher quelle est la forme la plus avantageuse pour les calculs à donner aux fonctions $(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$ de $(a, b, \ldots k)$ et à la fonction G elle-même. Il considère $(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$ comme les âges de n têtes soumises à une même loi de survie w_x, et G comme la probabilité de survie du groupe $(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$ au bout du temps t. Il déduit de ces hypothèses la forme de la nouvelle loi de survie w_x dans le cas d'une

[1] Nous avons vérifié plus haut (page 65) que, si la loi de survie adoptée est celle de Makeham, les différences secondes du logarithme de v_x sont en progression géométrique. Nous avons trouvé en effet : $\Delta_2 \log v_x = (c-1)^2 \log g \,.\, c^x$.

fonction du n^e ordre et sépare toutes ces fonctions en deux classes : pour les unes, la relation qui relie v_x à w_x prend la forme : $v_x = w_x$,
tandis que pour les autres elle s'écrit :

$$(v_x)^N = (w_x)^n.$$

On peut voir aisément que la loi de Gompertz fait partie de la première classe, tandis que celle de Makeham appartient à la seconde[1] : en raison de ce fait, M. Quiquet nomme fonctions gompertziennes celles de la première catégorie et fonctions makehamiennes celles de la seconde.

Donc, si l'équation de survie des têtes du groupe considéré est gompertzienne, une table unique de la fonction w_x suffit pour toutes les valeurs possibles de N. Si, au contraire, la fonction est makehamienne d'ordre

[1] En effet, si la loi étudiée est celle de Makeham, les fonctions $(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$ se réduisent à une seule ξ qui peut être considérée comme l'âge d'une tête soumise à une loi w_x de même forme que celle de Makeham : $w_x = k' s'^x g'^{c^x}$

On doit avoir : $G(\xi) = p_\xi^t = p_{a, b, \ldots k}^t$,

ou, en prenant les logarithmes :

$t \log s' + (c^t - 1) c^\xi \log g' = Nt \log s + (c^t - 1)(c^a + c^b + \ldots + c^k) \log g$,

relation satisfaite quel que soit t en prenant :

$$\begin{cases} \log s' = N \log s \\ c^\xi \log g' = (c^a + c^b + \ldots + c^k) \log g. \end{cases}$$

s' est déterminé par la 1re relation, ξ par la 2e, k' et g' sont entièrement arbitraires.

On peut prendre : $k' = k^N \qquad g' = g^N$

et on a bien la relation : $w_x = v_x^N$.

Si $s = s' = 0$, la loi étudiée est celle de Gompertz, on peut prendre $k' = k$, $g' = g$, on a bien alors $w_x = v_x$, et ξ est determiné par la relation $c^\xi = c^a + c^b + \ldots + c^k$.

(Voir plus haut, loi du vieillissement uniforme, page 66).

n, la probabilité de survie d'un groupe de N têtes se ramènera à une autre où n'interviendront que n têtes. Mais comme $w_x = (v_x)^{\frac{N}{n}}$, cette fonction change avec N, et il faut calculer une nouvelle table pour chaque valeur de N.

Les nombres (α, β, ... ζ) ont été désignés sous le nom d'*actuariens* par M. Quiquet, qui a formé les relations unissant les n actuariens d'une fonction d'ordre n aux N quantités (a, b, ... k). Il a étudié en particulier le cas des fonctions du 1er et du 2e ordre. Ces dernières sont appelées par M. Poterin du Motel « les lois de l'avenir », et les résultats de l'étude précédente sont, en ce qui concerne ces lois, mis par cet auteur sous la forme d'un théorème dont voici l'énoncé :

« Si des têtes x_1, x_2, ... x_l en nombre quelconque l, obéissent à l'une de ces lois, on peut déterminer les âges ξ_1 et ξ_2 de deux autres têtes obéissant à une loi de même forme et indépendante des âges (x_1, x_2, ... x_l) de telle sorte que le groupe de ces deux têtes ait, après un temps quelconque, la même chance de survivre que celui des l têtes données[1]. »

Cette proposition est d'ailleurs facile à démontrer directement pour chacune des quatre lois du 2e ordre.

[1] Poterin du Motel, 2, page 144. — Voir dans cet ouvrage la démonstration directe de la proposition énoncée.

E. — PRINCIPALES TABLES DE MORTALITÉ USITÉES EN FRANCE ET A L'ÉTRANGER

Anciennes tables. — Jusque vers le milieu du XIXe siècle, les seules tables de mortalité couramment employées en France furent celles de Deparcieux et de Duvillard. En Angleterre, on utilisait la table de Carlisle (1816). Nous dirons quelques mots des tables de Deparcieux et Duvillard, qui présentent pour nous un grand intérêt historique; mais nous laisserons complètement de côté les statistiques plus anciennes, telles que celles de Halley (1693), de Sussmilch (1741), de Northampton (1780).

Table de Deparcieux. — La table qui a servi en France jusqu'en 1860 aux calculs des opérations d'assurance en cas de vie : rentes viagères, capitaux différés, etc., a été construite en 1746, par Deparcieux, d'après les résultats de diverses tontines. Les tontines ont joui au XVIIIe siècle de la faveur populaire. C'était sous cette forme que l'on pratiquait alors le plus volontiers l'assurance sur la vie, et cela précisément à cause du caractère spécial de ce genre d'opérations, qui ressemble beaucoup plus à un pur jeu de hasard qu'à une manifestation de la vertu de prévoyance.

Les assurés étaient répartis en classes, d'après leur âge, et chaque classe comprenait cinq âges consécutifs. Deparcieux prit comme âge moyen x pour toutes les têtes de la classe comprenant les âges $(x-2)$ à $(x+3)$,

estimant que par la substitution de x à l'âge moyen réel $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ il tenait compte de ce que, dans chaque catégorie, les têtes de l'âge le plus jeune devaient être les plus nombreuses. Pour la première classe, au contraire, qui comprenait les âges de 0 à 5 ans, il prit comme âge moyen 3 ans pour tenir compte du taux de mortalité très élevé de la prime enfance.

Deparcieux, en combinant les résultats qui lui étaient fournis par les administrations des tontines, obtint une table de survie donnant les nombres de survivants aux âges 3, 7, 12, 17... Il compléta cette table par interpolation pour les âges intermédiaires et supposa le nombre des vivants à 3 ans égal à 1 000. (Les résultats fournis par les tontines étudiées portaient sur 10 000 têtes environ.)

La table s'arrête à l'âge de 94 ans. Sur d'assez longues périodes, le nombre des décès est considéré comme constant d'année en année, c'est-à-dire que la courbe de survie déduite de la table comprend des portions de droites. Ainsi, à partir de l'âge de 20 ans jusqu'à l'âge de 37 ans, le nombre des décès annuels est 8, et le nombre des vivants v_{20+x} à l'âge $(20+x)$ est donné par la formule :

$$v_{20+x} = v_{20} - 8x \qquad 0 < x \leqq 17.$$

De même, de 37 à 46 ans la formule suivante :

$$v_{37+y} = v_{37} + 7y \qquad 0 < y \leqq 9$$

est applicable.

Les Compagnies françaises d'assurances sur la vie, estimant à juste titre que la clientèle des tontines était

comparable à leur clientèle de rentiers viagers, et manquant de données statistiques, adoptèrent la table de Deparcieux pour servir de base aux calculs relatifs à cette catégorie d'assurés. Elles eurent quelques mécomptes et durent à plusieurs reprises modifier leurs tarifs pour éviter des pertes : la table de Deparcieux indique en effet une mortalité trop rapide en général, et surtout dans les premières et les dernières années de la vie humaine.

Table de Duvillard (1806). — Duvillard étudia la mortalité de la population générale de la France. Quel fut le procédé employé ? Quelle est la valeur des éléments statistiques qu'il utilisa ? On ne peut se prononcer d'une façon certaine. Dans un « travail pour l'établissement d'une caisse nationale d'économies et d'assurances sur la vie », travail qui fut présenté à l'Académie des sciences, mais qui n'a jamais été publié, Duvillard donnait des indications sur les éléments qu'il avait utilisés et sur la méthode d'interpolation qu'il avait adoptée. « L'auteur a trouvé, lit-on dans un rapport de Legendre à l'Académie au sujet de ce travail, que la simple équation :

$$z = 1 - k\frac{x}{y},$$

renfermait tous les faits que présente la mortalité observée en France, et c'est au moyen de cette équation et en faisant entrer dix coefficients dans la valeur de y :

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

qu'il a interpolé la table de mortalité sur laquelle sont fondés les calculs de tous ses tableaux. »

Quoi qu'il en soit, le manuscrit de Duvillard n'ayant pas été publié, l'oubli se fit sur ses travaux, et on sait seulement, grâce à un autre ouvrage du même auteur: *Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité à chaque âge* (1806), que ses observations, recueillies avant la Révolution, ont porté sur 2 920 672 têtes ayant fourni 101 542 décès.

La table de Duvillard est, comme celle de Deparcieux, à mortalité très rapide, au moins jusqu'à un âge avancé: 85 ans environ. Ensuite les taux de mortalité sont trop faibles, et la table s'étend jusqu'à 109 ans. Le taux de mortalité à 100 ans est égal à 0,34783. La table AF donne pour ce même taux la valeur 0,60478. Aux âges moyens au contraire, la mortalité indiquée par Duvillard est encore plus rapide que celle qui résulte de la Table de Deparcieux; elle est, par suite, beaucoup plus rapide que ne l'indiquent les tables modernes. Ainsi, sur 1 000 000 de têtes prises à leur naissance, il y en a, d'après Duvillard, 369 404 vivantes à 40 ans et, d'après la table AF, 711 324, près du double.

Jusqu'à ces dernières années, les Compagnies françaises ont utilisé la table de Duvillard pour les calculs relatifs à leurs assurés en cas de décès; elles ont pu, de cette façon, réaliser des bénéfices fort importants, ce qui leur a donné l'idée de faire participer leurs assurés aux bénéfices.

Cependant il devenait désavantageux d'assurer des têtes trop âgées, à cause de la mortalité trop lente accusée par la table aux âges avancés.

Tables modernes. — En 1860, trois Com-

pagnies françaises (Assurances Générales, Union, Nationale) corrigèrent la table de Deparcieux à partir de l'âge de 50 ans, au moyen des observations faites sur leurs rentiers viagers.

M. Beauvisage publia, en 1867, une table de mortalité déduite des opérations de la tontine Lafarge et se servit pour l'ajuster d'un procédé simple exposé dans le n° 63 du *Bulletin de l'Institut des actuaires français* (décembre 1905), par M. Achard, qui en recommande l'emploi.

En 1869, l'*Institute of actuaries*, de Londres, publia une table célèbre qui constitue un des plus beaux monuments de la science actuarielle et qui fut la première table d'expérience construite sur des bases rationnelles avec des méthodes statistiques scientifiques. L'*Institute of actuaries* utilisa les observations faites par vingt Compagnies anglaises depuis leur fondation (dix-sept d'entre elles avaient déjà publié en 1843 une table d'expérience). Les assurés furent divisés en plusieurs catégories, d'après leur état de santé au moment de la souscription du contrat. Une fiche fut établie pour chacun d'eux, et on distingua les hommes des femmes. Les résultats de ces travaux furent publiés dans un ouvrage intitulé : *Mortality experience*, qui comprend quatre tables : H^M (hommes), H^F (femmes), H^{MF} (combinaison des deux précédentes) et D^{MF} (relative aux assurés dont l'état de santé n'est pas absolument satisfaisant au moment de la signature du contrat). Ajustées d'abord par la méthode de M. Woolhouse, elles le furent ensuite par la formule de Makeham (en 1887). La mortalité de la table H^M est très voisine de celle de la table AF.

En France, la Caisse nationale des retraites pour la vieillesse avait pu, par l'observation de ses rentiers viagers, réunir des documents statistiques fort précieux qu'elle utilisa pour la construction de la table CR, publiée en 1889. Mais, s'il était facile de suivre jusqu'à leur décès les déposants qui avaient versé à capital réservé, il était impossible, au contraire, de constater l'époque du décès de ceux qui avaient aliéné leur capital, s'ils mouraient avant l'entrée en jouissance de leur rente. On élimina ces derniers, et les observations ne portèrent que sur 164 698 déposants et 72 649 rentiers, représentant 1 407 522 années d'existence. On se trouvait ainsi posséder des données statistiques équivalentes à celles qui servirent à la construction de la table H^M : 1 200 400 années d'existence réparties entre 130 243 têtes.

Mais les observations aux âges extrêmes étaient fort peu nombreuses, et la table CR fut ajustée par la méthode de Woolhouse.

Cette table s'étend de 3 à 102 ans; elle donne le nombre des vivants de trimestre en trimestre ; les taux de mortalité que l'on en déduit sont comparables à ceux qui sont fournis par la table RF, au moins pour les âges moyens.

Tables AF et RF. — Six Compagnies françaises : *le Phénix, la Cie d'Assurances Générales, la Nationale, l'Union, la Paternelle* et l'*Urbaine*, réunies en Comité, décidaient, en 1876, de mettre en commun les données statistiques qu'elles avaient pu recueillir depuis leur fondation pour dresser une table de mortalité de leurs rentiers viagers. En 1887, le Comité, réduit à quatre

Compagnies, entreprit un travail analogue pour les assurés en cas de décès. Les tables RF et AF parurent en 1895 sous le titre : *Tables de mortalité du Comité des Compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie.*

La méthode qui fut adoptée pour le classement des observations avait été indiquée par M. de Kertanguy lorsqu'il avait, en 1874, dressé la table de mortalité des assurés de la *Compagnie d'Assurances Générales.* Cette méthode est exposée tout au long dans la préface des Tables du Comité.

Les observations s'étendirent de 1819 jusqu'au 31 décembre 1887 pour la table AF, et jusqu'au 31 décembre 1889 pour la table RF. Toute police souscrite pendant cet intervalle donna lieu à l'établissement de fiches ou cartes sur lesquelles étaient inscrits les renseignements statistiques extraits de cette police, et chaque contrat donnait naissance à autant de cartes qu'il comprenait de têtes. Ainsi une dotale nécessitait deux cartes.

En ce qui concerne les rentes viagères, l'annulation d'un contrat ne se fait guère que par décès. Aussi les fiches correspondantes étaient-elles très simples et ne comportaient, outre les noms et prénoms de l'assuré, que trois dates : la date de naissance, la date de la police et la date de sortie d'observation. Elles étaient disposées comme il est indiqué ci-contre.

On avait distingué les cartes relatives aux hommes de celles qui étaient relatives aux femmes. Les premières étaient violettes; les secondes, vertes.

Les cartes qui ont servi à l'établissement de la table AF ne différaient des précédentes que par le motif de la sortie d'observation qui y était explicité : rachat,

NAISSANCE	Année .... Mois	G (Ass. Génles) (Initiale de la Cie)

NOMS ET PRÉNOMS ....

N° de la Police ....

Date d° ....

Date de sortie ....

Modèle de fiche relative à un assuré en cas de vie (Table RF).

NAISSANCE	Année .... Mois	G

NOMS ET PRÉNOMS ....

N° de la Police ....

Date d° ....

SORTIE

Motif	Date
....	....

Cause du décès ....

Modèle de fiche relative à un assuré en cas de décès (Table AF).

résiliation, remplacement, à terme, etc. Les couleurs des fiches étaient différentes suivant la nature de l'assurance considérée. Il y avait cinq couleurs de fiches. De plus, celles qui étaient relatives aux femmes portaient une double barre bleue diagonale. Ces cartes portaient les indications ci-dessus.

Toutes les cartes furent classées par ordre alphabétique pour chacune des deux tables, et on réunit en un même paquet toutes les cartes relatives à une même tête. Comme on s'était aperçu que quelques personnes figuraient plusieurs fois sous des noms différents, on fit un nouveau classement par date de naissance, ce qui permit d'éviter quelques erreurs.

Construction de la table RF. — Chaque paquet de cartes relatives à une seule tête fut considéré comme une seule carte portant comme date d'entrée du risque en observation la date de conclusion du contrat le plus ancien, et comme date de sortie celle du décès, les rentiers viagers ne disparaissant que par décès. Toutes les têtes nées entre le 1er juillet d'une année et le 30 juin de l'année suivante furent considérées comme ayant le même âge, et comme nées toutes au 1er janvier. On répartit les cartes en groupes relatifs à des têtes de même âge entrées en observation dans le même semestre, les semestres étant comptés du 1er janvier au 30 juin et du 1er juillet au 31 décembre. On compta ensuite le nombre total des têtes de chaque groupe, puis séparément le nombre des hommes et celui des femmes, ce qui donna une vérification. Les résultats furent portés sur des feuilles de dépouillement disposées ainsi qu'il suit :

Date de naissance : Du 1er juillet 1838 au 30 juin 1839. **Age : 39 ans.** **Année 1878.**

ENTRÉES	NOMBRE DES ENTRÉES			DÉCÈS		
	H.	F.	H.+F.	H.	F.	H.+F.
Depuis juillet 1878.		...				
Du 1er juillet 1877 au 30 juin 1878 . .		..				
Restant en cours au 31 décembre 1877.		......				
TOTAUX. . . .	....	....	....			
Plus le $^1/_4$ des nombres rouges. . . .		....				
Têtes exposées au risque.	....	....	....	....		. .

Il y eut donc ainsi une série de feuilles pour chaque âge et, dans chaque série, une feuille pour chacune des années de 1819 à 1889. Sur la première ligne, on inscrivait à l'encre rouge le nombre des têtes entrées du 1er juillet au 31 décembre de l'année d'observation ; ces têtes étaient supposées avoir connu le risque pendant un quart d'année seulement. La deuxième ligne comprenait le total du nombre rouge de la feuille précédente et du nombre des têtes entrées pendant le premier semestre de l'année d'observation. La troisième ligne donnait le nombre de têtes restant en observation au 31 décembre de l'année précédente, différence obtenue en retranchant le nombre des décès des nombres de la quatrième ligne de la feuille précédente. Pour obtenir ce nombre de décès, on divisa toutes les cartes portant

la même date de naissance en deux sections : têtes vivantes et têtes mortes le 31 décembre 1889. Les dernières furent classées par années de décès. On eut ainsi le nombre des décès à chaque âge.

Sur la quatrième ligne, on inscrivit le total des deuxième et troisième lignes et on y ajouta le quart des nombres rouges (puisque les têtes correspondantes étaient supposées avoir couru le risque pendant le quart de l'année seulement), pour avoir le nombre des têtes exposées au risque au 1er janvier de l'année considérée.

La feuille de l'année 1889 fournit un contrôle, puisque le nombre des têtes restant en observation au 31 décembre 1889 était donné par le dépouillement des cartes de la première section.

On peut remarquer que l'on aurait pu parfaitement supprimer la ligne : plus le quart des nombres rouges; son introduction est plutôt une cause d'erreur, puisque l'on suppose que les têtes entrées dans le premier semestre courent le risque pendant toute l'année, tandis que celles entrées dans le deuxième ne courent le risque que pendant un quart d'année.

Les résultats obtenus en dernière ligne étaient portés sur des feuilles récapitulatives : chacune d'elles correspondait à un âge, et donnait le total des têtes exposées au risque pendant un an, à cet âge, et des décès survenus parmi ces têtes. Le quotient constitue le taux de mortalité à l'âge considéré [1].

[1] Les observations portèrent sur 67247 têtes ayant donné 36916 décès pour 635909,75 années d'existence. Les têtes survivantes au 31 décembre 1889 étaient au nombre de 30331.

Construction de la table AF. — Cette table fut construite d'après les mêmes principes que la précédente. Une complication résultait de ce fait que les têtes assurées peuvent disparaître autrement que par décès. Aussi avait-on créé une troisième section renfermant les polices annulées avant le 31 décembre 1887 pour toute autre cause que le décès du titulaire. D'ailleurs, le titulaire pouvait abandonner sa police et souscrire plus tard un nouveau contrat. Si l'abandon durait moins de six mois, on n'en tenait pas compte ; sinon, on considérait le nouveau contrat comme souscrit par une tête nouvelle.

Les feuilles de dépouillement étaient analogues à celles qui furent utilisées pour la table RF. Un petit tableau intitulé : Mouvement des têtes pendant l'année, permettait de faire apparaître le détail du calcul du nombre de contrats en cours au 31 décembre, nombre qui figurait à la 5e ligne de la feuille suivante. (Voir page 92.)

La ligne : « Plus le quart des nombres rouges » était simplement déplacée, et on avait ajouté une ligne indiquant la moitié du nombre des sorties.

Les résultats étaient portés sur des feuilles récapitulatives identiques à celles qui furent utilisées pour la table RF[1].

Ajustement. — Comme on voulait faire figurer ces tables à l'Exposition de 1889, on se hâta de les ajuster au moyen de la méthode de Woolhouse ; mais cet ajustement fut repris ensuite à l'aide de la formule de Makeham :

$$v_x = ks^x g^{c^x}.$$

[1] Les observations portèrent sur 229143 têtes ayant donné 22617 décès pour 1790656,75 années d'existence.

A-F

Date de naissance :
Du 1er juillet 1851 au 30 juin 1852.

Age : 30 ans.

Année 1882.

ENTRÉES	NOMBRE DES ENTRÉES			NOMBRE DES SORTIES			DÉCÈS		
	H.	F.	H+F.	H.	F	H+F.	H.	F.	H+F.
Depuis juillet 1882									
Du 1er juillet 1881 au 30 juin 1882 .									
Plus le quart des nombres rouges .									
				MOUVEMENT DES TÊTES PENDt L'ANNÉE					
Totaux.									
Restant en cours au 31 déc. 1881. .				Têtes soumises à l'observation. . . (moins le quart des nombres rouges).					
Têtes soumises à l'observation. . .									
Moins la moitié du nombre des sorties				Total des décès et sorties pt l'année.					
Têtes exposées au risque				Reste en cours au 31 déc. 1882. . . .					

Les constantes, déterminées en 1re approximation au moyen de la formule de MM. King et Hardy, furent calculées avec une précision plus grande par la méthode des moindres carrés.

Mais la formule de Makeham ne pouvait convenir pour les âges jeunes. Aussi, de 0 à 25 ans, on adopta pour l'ajustement une formule représentée par un polynôme du 6e degré dont les coefficients furent calculés eux aussi par la méthode des moindres carrés. Comme la table RF avait donné lieu à très peu d'observations relatives aux têtes jeunes, on résolut de faire coïncider les tables AF et RF jusqu'à l'âge de 25 ans [1], en adoptant jusqu'à cet âge les résultats fournis par l'étude du polynôme du 6e degré dont il vient d'être question. Le taux de mortalité de 24 à 25 ans fut choisi le même pour les trois tables.

L'utilisation des taux bruts fut limitée, pour la table AF, aux âges compris entre 23 et 70 ans, parce que, d'une part, la loi de Makeham n'est pas applicable aux têtes jeunes et que, d'autre part, le nombre des observations d'assurés ayant dépassé l'âge de 70 ans était trop faible. Mais la formule de Makeham fut supposée applicable au delà de 70 ans et jusqu'à la limite extrême de la vie humaine.

Pour la table RF, on calcula les constantes de la formule de Makeham en utilisant les données fournies par la statistique entre les âges 40 et 89 ans. On eut ainsi cinquante équations qu'on traita par la méthode

[1] D'ailleurs, les observations relatives à la table AF aux bas âges proviennent de contre-assurances et conviennent aussi bien à RF qu'à AF.

des moindres carrés pour obtenir les valeurs de c, s et g. k fut calculé en partant de 1 000 000 de têtes à l'âge 0, en déduisant du polynôme du 6e degré les nombres des vivants à chaque âge jusqu'à 25 ans, et ensuite en appliquant la formule de Makeham à partir de cet âge.

Résultats. — L'ajustement étant effectué, il restait à comparer à chaque âge les résultats de l'ajustement aux résultats de la statistique brute. Si l'ajustement était bon, la loi des écarts fortuits devait s'appliquer. Cette vérification permit de constater que l'ajustement de la table AF était bien meilleur que l'ajustement de la table RF.

Les différentes valeurs des constantes sont :

$$\text{AF}\left\{\begin{array}{l} k = 916048 \\ c = 1{,}0916817 \\ g = 0{,}9984400 \\ s = 0{,}9949930 \end{array}\right. \qquad \text{RF}\left\{\begin{array}{l} k = 922381 \\ c = 1{,}1001136 \\ g = 0{,}9993868 \\ s = 0{,}9944272 \end{array}\right.$$

Les tables AF et RF furent, dès leur apparition, adoptées par toutes les *Compagnies françaises*, et un décret du 20 janvier 1906 les rendit obligatoires pour les entreprises d'assurances sur la vie faisant des opérations en France.

En dehors des opérations de la Caisse Nationale des Retraites, la table CR est utilisée par les Sociétés mutuelles d'assurances sur la vie, pour les calculs relatifs aux combinaisons en cas de vie, et surtout par les Compagnies d'assurances contre les accidents du travail. (Voir Livre II, le chapitre concernant ces assurances.)

CHAPITRE II

CALCUL DES PRIMES PURES

F. — ANNUITÉS VIAGÈRES

Intérêt composé. — Nous rappellerons très brièvement les principes du calcul des intérêts composés et des annuités en laissant de côté toutes les considérations étrangères au calcul proprement dit et que le lecteur trouvera exposées dans les traités spéciaux d'opérations financières, en particulier dans l'ouvrage de M. Barriol[1].

Quand le prêteur ne reçoit pas, à la fin de chaque période, les intérêts qui lui sont dus, ces intérêts s'ajoutent au capital prêté, et, ces sommes se confondant, il ne serait pas juste que le capital primitif seul rapportât intérêt, les intérêts non versés constituant, au même titre que le capital lui-même, des sommes dues par l'emprunteur. Les intérêts ajoutés successivement à la fin de chaque période rapporteront donc intérêt au taux convenu pour le prêt.

Si C est le capital prêté en francs et i le taux, c'est-à-dire l'intérêt pour 1 fr. de capital au bout d'une période, la somme due au bout de la première période est :

$$K_1 = C(1 + i),$$

[1] Barriol, E. S.

au bout de la deuxième période elle devient :

$$K_2 = C(1 + i)^2,$$

et au bout de la n^e : $K_n = C(1 + i)^n$. (1)

Inversement, si le capital à rembourser au bout de n périodes est K_n, la valeur du capital C qui a été versé par le prêteur est donnée par la relation :

$$C(1 + i)^n = K_n$$
$$C = K_n(1 + i)^{-n}.$$

On dit que C est la *valeur escomptée* du capital K_n payable n périodes après l'époque de l'évaluation, ou la *valeur actuelle* de ce même capital K_n payable dans n unités de temps.

Si C est le capital prêté, la somme due par l'emprunteur au bout de p unités de temps est :

$$C(1 + i)^p = K_p,$$

et la valeur acquise par ce même capital au bout de n périodes est :

$$C(1 + i)^n = K_n.$$

Donc : $$K_p = K_n(1 + i)^{-(n-p)}.$$

K_p est la valeur actuelle de la somme K_n qui doit être remboursée dans $(n - p)$ périodes.

Si la période devient k fois plus petite, le taux correspondant étant i_k, le capital prêté C devient après nk petites périodes, ou n périodes primitives :

$$K_{nk} = C(1 + i_k)^{nk}.$$

On dit que les taux i et i_k sont *équivalents* si $K_{nk} = K_n$, c'est-à-dire si :

$$1 + i = (1 + i_k)^k \quad \text{ou} \quad i_k = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1.$$

Si au contraire $i_k = \frac{i}{k}$, les taux i_k et i sont dits *proportionnels*.

Si k augmente indéfiniment, c'est-à-dire si la période devient de plus en plus petite, on remarque que la valeur limite du capital prêté augmenté de ses intérêts composés est :

$$\lim_{k\infty} C\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{nk} = \lim_{k\infty} C\left[\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{\frac{k}{i}}\right]^{ni} = Ce^{ni},$$

et que d'autre part :

$$\lim_{k\infty} ki_k = \lim_{k\infty} k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$$

$$= \lim_{k\infty} k\left[e^{\frac{1}{k}\log(1+i)} - 1\right] = \log(1+i).$$

La limite de ki_k est le taux ι de l'*intérêt continu* équivalent au taux i. En effet, lorsque k augmente indéfiniment, la durée t de la période de capitalisation devient de plus en plus petite. La période primitive ayant été choisie égale à l'unité de temps : $kt = 1$, et :

$$\lim_{k\infty} ki_k = \lim_{t=0} \frac{i_k}{t} = \iota$$

Donc : $$\iota = \log(1+i).$$

Cette relation donne la valeur du *taux instantané* ou *taux de l'intérêt continu* ι en fonction du taux ordinaire i.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé la durée du prêt égale à un nombre entier de périodes de capitalisation. Lorsque ce nombre est fractionnaire : $\frac{p}{q}$,

la formule à appliquer est encore analogue à la formule (1). En effet, si nous choisissons une période q fois plus petite, la durée du prêt devient égale à p nouvelles périodes; le taux i' équivalent au taux i primitif est donné par la relation

$$1 + i' = (1 + i)^{\frac{1}{q}}.$$

Au bout de p périodes, la valeur du capital C placé au taux i' est :

$$C(1 + i')^p = C(1 + i)^{\frac{p}{q}}.$$

La formule (1) est donc bien applicable au cas des durées fractionnaires.

Annuités. — On a souvent à calculer la valeur actuelle à un taux donné i d'une suite d'annuités, c'est-à-dire d'une suite de versements effectués au bout d'intervalles de temps égaux. Le cas le plus fréquent est celui où toutes les annuités sont égales. Si leur nombre est n, et leur valeur commune a, le premier versement étant effectué à la fin de la première période, la valeur actuelle de la suite d'annuités, au début de la première période, est :

$$V = a[(1 + i)^{-1} + (1 + i)^{-2} + \dots + (1 + i)^{-n}]$$
$$= a\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}.$$

Si les versements étaient effectués au commencement de chaque période, leur valeur actuelle au moment même du premier versement serait :

$$V' = a[1 + (1 + i)^{-1} + \dots + (1 + i)^{-n+1}]$$
$$= a(1 + i)\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = V(1 + i).$$

On peut se proposer de résoudre le problème inverse : calculer la valeur commune des annuités a nécessaires au remboursement de l'emprunt d'une somme V en n années. Ce problème est résolu par les formules précédentes. Si les annuités sont payables en fin d'année :

$$a = \frac{Vi}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Chacune d'elles comprend deux parties : 1° l'intérêt au taux i du capital restant dû, 2° le remboursement d'une fraction de ce capital. Si l'on met en évidence ces deux parties dans la k^e annuité, on aura :

$$a = V_k i + m_k$$

en désignant par V_k le capital restant dû et par m_k l'amortissement correspondant à l'annuité considérée. La $(k+1)^e$ annuité s'exprime de même :

$$a = (V_k - m_k)\, i + m_{k+1}.$$

La comparaison de ces deux relations donne m_{k+1} en fonction de m_k :

$$m_{k+1} = m_k(1+i),$$

ce qui montre que les amortissements successifs croissent en progression géométrique.

On peut enfin se demander quelle est la valeur finale d'une suite de n annuités a versées soit au début, soit à la fin de chaque période. Si les annuités sont versées à la fin des périodes, cette valeur finale est :

$$a[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1] = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Elle est égale, comme on pouvait le prévoir à priori, à : $V(1+i)^n$.

Si les annuités avaient été versées au début des périodes, la valeur finale serait :

$$V'(1+i)^n = V(1+i)^{n+1}.$$

Remarque. — Il est évident, et cela est d'ailleurs facile à vérifier, que la différence entre les valeurs actuelles d'un même capital payable à deux époques distinctes est égale à la valeur actuelle des intérêts de ce même capital servis périodiquement pendant l'intervalle.

Ainsi, la valeur actuelle d'une suite de n annuités a étant V, la valeur actuelle des intérêts ai du capital a payables pendant le même temps est Vi. Or on a :

$$Vi = a - a(1+i)^{-n}$$

et cette relation traduit précisément la remarque précédente.

En particulier, s'il s'agit d'une rente perpétuelle de terme a, comme le remboursement du capital n'est jamais effectué, on a :

$$Vi = a,$$

ce que l'on pourrait écrire directement, en remarquant que :

$$V = a[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots]$$

$$= a\left[\frac{1}{1-(1+i)^{-1}} - 1\right] = \frac{a}{i}.$$

Annuités viagères et capitaux différés. — Au paragraphe précédent, nous avons supposé que



les versements successifs étaient uniquement fonctions du temps et qu'aux époques fixées les paiements avaient lieu, indépendamment de toute circonstance.

Ces annuités sont dites *certaines*.

Nous allons nous occuper maintenant d'annuités telles que les versements dépendent non seulement du temps, mais de certains événements. Par exemple, les annuités ne sont payables que si un groupe de têtes déterminé est vivant à chaque échéance. Ce sont alors des annuités *viagères*.

On désignera, dans ce qui va suivre, par annuité viagère reposant sur une tête d'âge x, *la valeur actuelle de paiements égaux à l'unité effectués d'année en année tant que cette tête existera.*

Capital différé. — Calculons donc d'abord quelle est la valeur actuelle d'un capital égal à l'unité payable dans n années à la condition que la tête d'âge x existe à cette époque. Nous désignerons, suivant un usage généralement adopté aujourd'hui, cette valeur actuelle par la notation P_x^n, et nous la nommerons *capital différé en cas de vie* ou simplement *capital différé*.

La valeur actuelle de 1 fr. payable d'une façon certaine dans n années est :

$$(1+i)^{-n}.$$

Mais comme cette somme de 1 fr. n'est payée qu'en cas de vie de la tête d'âge x, il faut multiplier cette valeur actuelle par la probabilité de vie de cette tête dans n années, et on obtient ainsi :

$$P_x^n = p_x^n(1+i)^{-n}. \qquad (1)$$

Dans l'établissement de cette formule, si l'on préfère ne pas introduire la probabilité de vie[1], on peut raisonner de la façon suivante :

Prenons un groupe de v_x têtes d'âge x et supposons qu'on s'engage à payer la somme de 1 fr. à chacune des têtes du groupe qui seront encore vivantes dans n années. On aura à verser dans n années une somme égale à v_{x+n} francs, et la valeur actuelle de cet engagement est :

$$v_{x+n}(1+i)^{-n}.$$

Exprimée en fonction de P_x^n, cette valeur actuelle est égale à $v_x P_x^n$.

On a donc la formule :

$$v_x P_x^n = v_{x+n}(1+i)^{-n}$$

équivalente à la formule (1).

De la relation (1) on déduit immédiatement la relation suivante :

$$P_x^{n+n'} = p_x^{n+n'}(1+i)^{-(n+n')} = p_x^n \cdot p_{x+n}^{n'}(1+i)^{-n-n'},$$

c'est-à-dire : $$P_x^{n+n'} = P_x^n P_{x+n}^{n'},$$

[1] Comme nous supposons les statistiques bien établies et la table de survie convenablement construite, nous n'emploierons plus le tour de raisonnement par la *mutualité;* mais, nous appuyant sur la réciproque du théorème de Bernoulli, et les principes du calcul des probabilités étant admis, nous ferons constamment intervenir les probabilités de vie dans les démonstrations, qui seront ainsi rendues beaucoup plus simples et plus rapides. Ce n'est donc qu'à titre d'exemple que nous employons ici *ce tour de raisonnement.*

relation tout à fait analogue à celle que nous avons obtenue par la considération des probabilités de vie.

La formule (1) s'applique au cas d'un groupe quelconque.

Rien en effet dans la démonstration n'oblige à considérer une tête unique. Il suffit d'y remplacer probabilité de vie d'une tête par probabilité de vie d'un groupe. Si l'on peut évaluer cette probabilité, on en déduit immédiatement l'expression du capital différé correspondant.

Or la probabilité de vie d'un groupe de têtes s'éteignant au dernier décès s'exprime en fonction linéaire et homogène des probabilités de vie de groupes s'éteignant au premier décès. Pour nous limiter à deux têtes, on sait que :

$$p^n_{\overline{xy}} = p^n_x + p^n_y - p^n_{xy}$$ (Voir page 21).

Il en résulte que :

$$P^n_{\overline{xy}} = P^n_x + P^n_y - P^n_{xy}.$$

Le problème revient à calculer le capital différé en cas de vie d'un groupe s'éteignant au premier décès. Or :

$$P^n_{xy} = p^n_{xy}(1+i)^{-n} = p^n_x P^n_y = P^n_x P^n_y (1+i)^n.$$

On voit que l'analogie des formules relatives aux probabilités de vie et de celles qui sont relatives aux capitaux différés ne subsiste pas dans ce cas.

Si le groupe se composait de k têtes, on aurait :

$$P^n_{x_1x_2\ldots x_k} = p^n_{x_1x_2\ldots x_k}(1+i)^{-n} = P^n_{x_1} P^n_{x_2} \ldots P^n_{x_k}(1+i)^{(k-1)n}.$$

Annuités viagères. — Nous pouvons mainte-

nant calculer la valeur actuelle d'une suite de versements de 1 fr. faits d'année en année tant que la tête d'âge x existe, c'est-à-dire l'expression de l'annuité viagère a_x sur la tête d'âge x :

$$a_x = P^1_x + P^2_x + \dots + P^q_x + \dots$$

La somme s'étend à toute la durée de la vie de la tête considérée.

S'il s'agit d'un groupe de têtes, on aura de même :

$$a_G = P^1_G + P^2_G + \dots + P^q_G + \dots$$

Mais il est facile de montrer que, quelle que soit la nature du groupe G, P^q_G est une fonction linéaire et homogène des expressions de capitaux différés reposant sur des groupes s'éteignant au premier décès, expressions telles que $P^q_{x_1 x_2 \dots x_k}$. Il en résulte que a_G s'exprime dans tous les cas en fonction linéaire et homogène des annuités viagères reposant sur des groupes de têtes s'éteignant au premier décès [1]. Ce sont donc ces dernières seules que nous avons à considérer.

Supposons que l'on veuille calculer l'annuité viagère reposant sur un groupe de trois têtes (x_1, x_2, x_3) s'éteignant au premier décès. La démonstration et les résultats seraient identiques pour un groupe quelconque de même nature.

$$a_{x_1 x_2 x_3} = P^1_{x_1 x_2 x_3} + P^2_{x_1 x_2 x_3} + \dots + P^q_{x_1 x_2 x_3} + \dots$$

[1] Par exemple : $a_{\overline{xy}} = P^1_{\overline{xy}} + P^2_{\overline{xy}} + \dots = P^1_x + P^1_y - P^1_{xy} + \dots$
$= a_x + a_y - a_{xy}$.

Nous avons démontré la relation :

$$P^{q}_{x_1x_2x_3} = P^{1}_{x_1x_2x_3} . \quad P^{q-1}_{x_1+1,\, x_2+1,\, x_3+1} .$$

Dans cette relation, substituons à q les entiers successifs 1, 2, ... et additionnons. Nous obtenons :

$$a_{x_1x_2x_3} = P^{1}_{x_1x_2x_3}\left(1 + P^{1}_{x_1+1,\, x_2+1,\, x_3+1} + \ldots\right)$$
$$= P^{1}_{x_1x_2x_3}\left(1 + a_{x_1+1,\, x_2+1,\, x_3+1}\right).$$

Cette formule de récurrence, appliquée de proche en proche à partir du groupe d'âges pour lequel :

$$a_{x_1+1,\, x_2+1,\, x_3+1} = 0,$$

en diminuant à chaque opération les trois âges d'une unité, permet de calculer l'annuité sur trois têtes d'âges quelconques.

On peut utiliser de même une foule d'autres formules de récurrence analogues, telle que la suivante :

$$a_{x_1x_2x_3} = \left(1 + a_{x_1+2,\, x_2+2,\, x_3+2}\right) P^{2}_{x_1x_2x_3} + P^{1}_{x_1x_2x_3},$$

qui, mise sous la forme :

$$a_{xxx\ldots x} = \left(1 + a_{x+2,\, x+2\ldots}\right) P^{2}_{xxx\ldots x} + P^{1}_{xx\ldots x},$$

a servi, lors de l'établissement des tables d'annuités viagères sur plusieurs têtes de même âge qui sont contenues dans le volume des Tables du Comité, à contrôler l'exactitude des résultats fournis par la relation :

$$a_{xx\ldots x} = P^{1}_{xx\ldots x}\left(1 + a_{x+1,\, x+1,\ldots x+1}\right).$$

On peut ainsi construire des tables d'annuités viagères reposant sur des groupes de têtes d'âges quelconques, qui s'éteignent au premier décès. En pratique, on n'a généralement à sa disposition que des

tables d'annuités viagères sur deux têtes, et on en déduit, quand il en est besoin, les annuités viagères relatives à un groupe plus nombreux, au moyen de méthodes approchées, comme la suivante, due à Simpson.

Supposons que l'on ait à calculer :

$$a_{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

On trouvera dans une table à double entrée d'annuités sur deux têtes $a_{x_1 x_2}$ et $a_{x_3 x_4}$.

Cherchons, dans la table relative à une seule tête, deux âges x et y, tels que

$$a_x = a_{x_1 x_2} \qquad a_y = a_{x_3 x_4}.$$

On prendra pour valeur approchée de $a_{x_1 x_2 x_3 x_4}$ la valeur a_{xy}.

Cette hypothèse conduit à des résultats exacts si la table de mortalité dont on fait usage a été ajustée au moyen de la formule de Gompertz, puisque la tête x a la même probabilité de vivre après un temps quelconque que le groupe $x_1 x_2$. Mais dans le cas général d'une loi de survie différente de celle de Gompertz, on ne peut évaluer le degré d'approximation obtenu par cette méthode, qui ne donne pas des résultats très exacts.

Ainsi, calculons l'annuité $a_{26,35,48,62}$ en utilisant la table AF et le taux 3 ½ %.

La table d'annuités viagères sur deux têtes nous donne :

$$a_{26\,;\,35} = 15{,}112 = a_{42,\,81}$$

$$a_{48\,;\,62} = 7{,}591 = a_{65,\,72}$$

$$a_{42,\,81\,;\,65,\,72} = 6{,}905$$

Elle nous eût aussi donné :

$$a_{26\,;\,62} = 8{,}360 = a_{63,\,40}$$

$$a_{35\,;\,48} = 11{,}886 = a_{53}$$

$$a_{63,\,40\,;\,53} = 6{,}876$$

et enfin :

$$a_{26\,;\,48} = 12{,}365 = a_{51,\,56}$$

$$a_{35\,;\,62} = 8{,}188 = a_{63,\,92}$$

$$a_{51,\,56\,;\,63,\,92} = 6{,}877$$

On voit que les deux premières valeurs obtenues sont assez différentes l'une de l'autre, tandis que la deuxième et la troisième sont très voisines.

La plupart des tables de mortalité actuelles ont été ajustées au moyen de la formule de Makeham, au moins à partir d'un certain âge. Ainsi les tables AF et RF ont été ajustées, au moyen de cette formule, à partir de l'âge de 25 ans. Or on sait que, d'après la loi du vieillissement uniforme, la probabilité de survie d'un groupe de k têtes d'âges x_1, x_2, ... x_k, s'éteignant au premier décès, est, après un temps quelconque, la même que la probabilité de survie d'un groupe de k têtes de même âge ξ, cet âge étant déterminé par l'une ou l'autre des deux relations équivalentes :

$$k \log p_\xi = \log p_{x_1} + \log p_{x_2} + \dots + \log p_{x_k}$$

$$k\varkappa_\xi = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_k.$$

Il résulte de là que : $a_{x_1 x_2 \dots x_k} = a_{\xi\xi \dots \xi}$.

Il suffira donc de construire des tables d'annuités reposant sur k têtes de même âge, ce qui simplifie

considérablement la question et réduit singulièrement le nombre des tables à construire.

Dans le recueil de *Tables du Comité des Compagnies françaises*, on trouve des tables d'annuités sur 1, 2,... 9, têtes de même âge. Si l'on calcule à l'aide de la table sur 4 têtes (AF, 3 1/2 %), l'annuité $a_{26;35;48;62}$ déjà calculée plus haut par la méthode de Simpson, on trouve :

$$a_{26;35;48;62} = a_{50,26,50,26;50,26;50,26} = 6,795,$$

valeur exacte de l'annuité cherchée (à l'interpolation par parties proportionnelles près), qui diffère des valeurs obtenues précédemment respectivement de 0,110 ; 0,081 ; 0,082.

Vie mathématique. — Si les v_x têtes d'âge x meurent toutes en même temps à l'âge $(x+n)$, l'annuité viagère reposant sur ces têtes se réduira à l'annuité certaine payable pendant n années. On nomme vie mathématique à l'âge x la durée n telle que l'annuité viagère a_x calculée d'après la table soit égale à l'annuité certaine :

$$a_x = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

En particulier, si $i=0$,

$$a_x = \frac{v_{x+1}+v_{x+2}+\dots}{v_x} = m_x,$$

m_x étant la vie moyenne à l'âge x diminuée d'une demi-année (voir la page 27), et :

$$\text{limite } \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = n \quad \text{pour} \quad i=0.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, la vie mathématique n est égale à m_x.

La détermination de la vie mathématique n'a aucune utilité pratique.

Annuités différées et temporaires. — On dit qu'une annuité reposant sur une tête d'âge x est différée de n années quand le premier versement de 1 fr. n'aura lieu qu'à la fin de la $(n+1)^e$ année en cas de vie de la tête x. Si, adoptant une notation généralement admise, on désigne cette annuité par a_x^n, on a

$$\begin{aligned} a_x^n &= P_x^{n+1} + P_x^{n+2} + \dots\dots\dots \\ &= P_x^n \left(P_{x+n}^1 + P_{x+n}^2 + \dots\dots \right), \\ &= P_x^n \, a_{x+n}. \end{aligned}$$

L'annuité est temporaire de n années quand les versements viagers de 1 fr. cessent à la fin de la n^e année :

$$a_x^{(n)} = P_x^1 + P_x^2 + \dots + P_x^n = a_x - a_x^n = a_x - P_x^n \, a_{x+n}.$$

Ces définitions subsistent pour des groupes composés de têtes d'âges quelconques, et les formules obtenues sont de même forme que les précédentes lorsqu'il s'agit de groupes s'éteignant au premier décès[1].

Annuités en progression arithmétique. — Nous verrons plus tard que l'on a fréquemment à con-

[1] Supposons qu'il s'agisse d'un groupe de 2 têtes d'âges (x, y) s'éteignant au dernier décès; on a :

$$a_{\overline{xy}}^{(n)} = P_{\overline{xy}}^1 + \dots + P_{\overline{xy}}^n = P_x^1 + P_y^1 - P_{xy}^1 + \dots + P_x^n + P_y^n - P_{xy}^n = a_x^{(n)} + a_y^{(n)} - a_{xy}^{(n)}$$

$$a_{\overline{xy}}^n = P_{\overline{xy}}^{n+1} + P_{\overline{xy}}^{n+2} + \dots = a_x^n + a_y^n - a_{xy}^n.$$

sidérer des annuités viagères dont les termes successifs varient en progression arithmétique. Si l'annuité considérée[1] repose sur une tête d'âge x, le premier terme étant p et la raison r, la valeur actuelle de cette suite de paiements est :

$$pa_x + rA_x - ra_x = (p - r)\, a_x + rA_x,$$

en désignant par A_x l'annuité dont les termes successifs sont : 1, 2, 3 ...

$$A_x = P^1_x + 2\, P^2_x + \dots + kP^k_x + \dots$$
$$= a_x + a^1_x + \dots + a^{k-1}_x + \dots$$

Si l'annuité A est différée de n années, on a :

$$A^n_x = P^{n+1}_x + 2\, P^{n+2}_x + \dots + kP^{n+k}_x + \dots$$
$$= P^n_x \left[P^1_{x+n} + 2P^2_{x+n} + \dots\right] = P^n_x A_{x+n},$$

formule analogue à celle qui est relative aux annuités à termes constants.

Si l'annuité A est temporaire et se compose de n versements annuels respectivement égaux à 1, 2, ... n, sa valeur est :

$$A^{(n)}_x = P^1_x + 2P^2_x + \dots + nP^n_x = A_x - A^n_x - na^n_x$$
$$= A_x - P^n_x (A_{x+n} + na_{x+n}).$$

En particulier, si $n = 1$:

$$A^{(1)}_x = P^1_x = A_x - P^1_x (A_{x+1} + a_{x+1}),$$
$$A_x = P^1_x (1 + a_{x+1} + A_{x+1}) = a_x + P^1_x A_{x+1}.$$

Cette relation de récurrence permet de calculer de

proche en proche les nombres A et d'établir une table de ces nombres.

Les annuités en progression arithmétique sur plusieurs têtes se calculent d'après les mêmes principes. Pour les groupes qui s'éteignent au premier décès, les formules sont identiques à celles qui ont été obtenues dans le cas d'une seule tête. Les groupes qui s'éteignent au dernier décès se ramènent, comme de coutume, aux précédents, et l'on a, par exemple :

$$A_{\bar{x}\bar{y}} = A_x + A_y - A_{xy}.$$

Annuités fractionnées. — Jusqu'ici, nous avons supposé que les termes de l'annuité étaient payés en fin d'année. Plus généralement, les raisonnements qui précèdent s'appliquent au calcul d'une annuité viagère dont les termes sont payables au bout d'intervalles de temps égaux à ceux qui ont été adoptés pour la table de survie choisie. Si la table donne le nombre des vivants de trimestre en trimestre, comme la table CR, et si l'âge x est exprimé également en trimestres, les expressions P_x^1, P_x^2,... représentent les valeurs actuelles du capital 1 différé de 1, 2,... trimestres, et les termes de l'annuité viagère :

$$a_x = P_x^1 + P_x^2 + \ldots\ldots\ldots$$

sont payables trimestriellement.

Mais généralement les tables donnent le nombre des vivants d'année en année, et l'on a cependant très fréquemment besoin de calculer l'annuité payable par semestres, par trimestres ou même par mois. Un grand nombre d'assurés payent en effet leurs primes semes-

triellement ou trimestriellement; car, pour beaucoup de personnes, il est préférable de verser plusieurs petites sommes dans l'année que d'en verser une grosse d'un seul coup. Les caisses populaires d'assurances doivent même prévoir le versement hebdomadaire ou mensuel des cotisations.

Supposons donc que les termes de l'annuité soient payables en k fois par an, tous les versements étant égaux et le k^e ayant lieu à la fin de l'année. Désignons par ${}_ka_x$ la valeur de l'annuité ainsi fractionnée :

$$ {}_ka_x = \frac{1}{k}\Big[P_x^{\frac{1}{k}} + P_x^{\frac{2}{k}} + \ldots + P_x^{n+\frac{1}{k}} + P_x^{n+\frac{2}{k}} + \ldots $$
$$ + P_x^{n+\frac{k-1}{k}} + P_x^{n+1} + \ldots\ldots\Big]. $$

On peut calculer exactement au moyen de la table de mortalité que l'on possède et au taux convenu les valeurs des capitaux différés d'un nombre entier d'années. Or, si l'on suppose qu'une interpolation par parties proportionnelles donne pour les valeurs intermédiaires des résultats suffisamment approchés, on aura :

$$ P_x^{n+\frac{1}{k}} = P_x^n - \frac{P_x^n - P_x^{n+1}}{k}, $$

$$ P_x^{n+\frac{2}{k}} = P_x^n - 2\,\frac{P_x^n - P_x^{n+1}}{k}, $$

. . . .

et, en remplaçant dans l'expression de ${}_ka_x$:

$$ {}_ka_x = \frac{1}{k}\Big[kP_x^0 - \frac{k(k+1)}{2}\,\frac{P_x^0 - P_x^1}{k} $$
$$ + kP_x^1 - \frac{k(k+1)}{2}\,\frac{P_x^1 - P_x^2}{k} + \ldots\ldots\Big] $$

$$ {}_k a_x = P_x^0 + P_x^1 + \ldots - \frac{k(k+1)}{2k^2}\left[P_x^0 - P_x^1 + P_x^1 - P_x^2 + \ldots\right] $$

$$ = 1 + a_x - \frac{k(k+1)}{2k^2} = a_x + \frac{k-1}{2k}. \qquad (1) $$

Le calcul précédent s'applique aux annuités différées et temporaires ; il s'applique aussi aux annuités concernant un groupe quelconque, aucune hypothèse n'ayant été faite sur x, si ce n'est celle de la variation, proportionnelle à l'âge, des capitaux différés entre deux âges distants d'une période. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$ {}_k a_x^n = {}_k a_{x+n} P_x^n = \left(a_{x+n} + \frac{k-1}{2k}\right) P_x^n = a_x^n + \frac{k-1}{2k} P_x^n $$

$$ {}_k a_x^{(n)} = {}_k a_x - {}_k a_x^n = a_x + \frac{k-1}{2k} - a_x^n - \frac{k-1}{2k} P_x^n $$

$$ = a_x^{(n)} + \frac{k-1}{2k}\left(1 - P_x^n\right) $$

$$ {}_k a_{xy} = a_{xy} + \frac{k-1}{2k} $$

$$ {}_k a_{\overline{xy}} = {}_k a_x + {}_k a_y - {}_k a_{xy} = a_{\overline{xy}} + \frac{k-1}{2k}. $$

Le plus fréquemment, les annuités que l'on a à considérer sont payables par semestres ou par trimestres, et les formules employées sont :

$$ {}_2 a_x = a_x + 0{,}25 $$

$$ {}_4 a_x = a_x + 0{,}375. $$

Pour établir les formules précédentes, nous avons supposé que, dans l'intervalle d'une année, la fonction P_x^n variait proportionnellement au temps. Nous aurions pu faire la même hypothèse sur le nombre des vivants v_x à l'âge x:

$$v_{x+\frac{1}{k}} = v_x - \frac{v_x - v_{x+1}}{k}$$

. . . .

$$v_{x+n+\frac{h}{k}} = v_{x+n} - \frac{h}{k}\left(v_{x+n} - v_{x+n+1}\right)$$

. . . .

D'où :

$$P_x^{n+\frac{h}{k}} = \frac{v_{x+n+\frac{h}{k}}}{v_x}(1+i)^{-n-\frac{h}{k}}$$

$$= \left[\frac{v_{x+n}}{v_x} - \frac{h}{k}\left(\frac{v_{x+n}}{v_x} - \frac{v_{x+n+1}}{v_x}\right)\right](1+i)^{-n-\frac{h}{k}}$$

$$= \left(1-\frac{h}{k}\right)(1+i)^{-\frac{h}{k}}P_x^n + \frac{h}{k}(1+i)^{1-\frac{h}{k}}P_x^{n+1}.$$

En additionnant les expressions analogues, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_k a_x = \frac{1}{k}\Big[&\left(1-\frac{1}{k}\right)(1+i)^{-\frac{1}{k}}P_x^0 + \frac{1}{k}(1+i)^{1-\frac{1}{k}}P_x^1 \\ &+ \left(1-\frac{2}{k}\right)(1+i)^{-\frac{2}{k}}P_x^0 + \frac{2}{k}(1+i)^{1-\frac{2}{k}}P_x^1 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(1-\frac{h}{k}\right)(1+i)^{-\frac{h}{k}}P_x^n + \frac{h}{k}(1+i)^{1-\frac{h}{k}}P_x^{n-1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \Big]. \end{aligned}$$

$$
{}_k a_x = \frac{1+a_x}{k}\sum_{h=1}^{h=k}\left(1-\frac{h}{k}\right)(1+i)^{-\frac{h}{k}} + \frac{a_x}{k}\sum_{h=1}^{h=k}\frac{h}{k}(1+i)^{1-\frac{h}{k}}
$$

$$
= \frac{1+a_x}{k}\sum_1^k (1+i)^{-\frac{h}{k}} - \frac{1-ia_x}{k}\sum_1^k \frac{h}{k}(1+i)^{-\frac{h}{k}}
$$

$$
= \frac{1+a_x}{k}\,\frac{1-(1+i)^{-1}}{(1+i)^{\frac{1}{k}}-1} - \frac{1-ia_x}{k}\,S,
$$

en posant :

$$
S = \sum_1^k \frac{h}{k}(1+i)^{-\frac{h}{k}}.
$$

Calculons S :

$$
S = \frac{1}{k}(1+i)^{-\frac{1}{k}} + \frac{2}{k}(1+i)^{-\frac{2}{k}} + \frac{3}{k}(1+i)^{-\frac{3}{k}} + \dots
$$

$$
+ \dots + (1+i)^{-1}
$$

$$
S(1+i)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} + \frac{2}{k}(1+i)^{-\frac{1}{k}} + \dots + (1+i)^{-1+\frac{1}{k}}.
$$

En retranchant la première expression de la seconde, il vient :

$$
S\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right] = \frac{1}{k}\left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{k}} + \dots\dots\dots \right.
$$

$$
\left. + (1+i)^{-1+\frac{1}{k}} - k(1+i)^{-1}\right]
$$

$$
= \frac{1}{k}\,\frac{1-(1+i)^{-1+\frac{1}{k}}}{(1+i)^{\frac{1}{k}}-1} + \frac{1}{k} - (1+i)^{-1}
$$

et, après réductions, on obtient :

$$
{}_k a_x = \frac{1}{k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}}-1\right]} - \frac{1-ia_x}{k^2\left[(1+i)^{\frac{1}{k}}-1\right]^2}\, i(1+i)^{-1+\frac{1}{k}} \quad (2),
$$

formule sensiblement plus compliqnée que celle [1] qui est employée habituellement (1).

Annuité continue. — Si k augmente indéfiniment, la limite de ${}_k a_x$ est l'annuité dont les termes seraient payables à chaque instant : c'est l'annuité continue à l'âge x :

$$\alpha_x = \int_0^\infty \frac{v_{x+t}}{v_x} (1+i)^{-t} dt.$$

On peut obtenir des valeurs approchées de cette annuité en partant de la formule (1) ou de la formule (2). La première donne en effet :

$$\alpha_x = a_x + \frac{1}{2},$$

et la seconde :

$$\alpha_x = \frac{1}{\iota} - \frac{i}{1+i} \frac{1-ia_x}{\iota^2} = \frac{\iota(1+i) - i(1-ia_x)}{\iota^2(1+i)},$$

puisque : $\lim k[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1] = \iota$, taux de l'intérêt continu (voir page 97).

Prime unique et primes annuelles. — L'assuré peut remplir d'un seul coup ses engagements par le versement d'une prime unique; mais, le plus généralement, il préfère verser des primes annuelles constantes, viagères ou temporaires. La détermination de ces dernières se déduit immédiatement de la con-

[1] On peut remarquer que la formule (1) est indépendante du taux d'intérêt adopté. Il n'en est pas de même de la formule (2).

naissance de la prime unique de la combinaison considérée, et cela doit être, puisque dans les deux cas les engagements de l'assuré restent les mêmes : le mode de payement seul varie.

Si la prime unique de la combinaison considérée est Π pour un assuré d'âge x, la prime annuelle constante et viagère de la même combinaison étant ϖ, la valeur des engagements de l'assuré exprimée de deux façons différentes au début de l'assurance est, en supposant, ce qui est le cas général, que le payement des primes s'effectue au début de l'année :

$$\Pi = \varpi(1 + a_x).$$

Si le payement des primes est temporaire et dure n années, cette formule devient :

$$\Pi = \varpi\left(1 + a_x^{(n-1)}\right).$$

Enfin, s'il s'agit d'une assurance dont la prime annuelle varie en progression arithmétique de raison p, les primes successives sont :

$$\varpi,\ \varpi + p,\ \varpi + 2p,\ \ldots\ \varpi + kp \ldots$$

et leur valeur actuelle, au moment du payement de la première prime, est la valeur de la prime unique de la combinaison, ce qui donne :

$$\Pi = \varpi(1 + a_x) + pA_x,$$

si le payement des primes est viager,

et : $$\Pi = \varpi\left(1 + a_x^{(n-1)}\right) + pA_x^{(n-1)},$$

s'il est temporaire et doit comprendre n primes au plus.

D'une façon générale, si la valeur de la prime unique est indépendante de la valeur de la prime annuelle, et si l'on désigne par Π_g la prime unique d'une assurance reposant sur la vie d'un groupe g, par ϖ_g la prime annuelle correspondante, et par a_g l'annuité viagère payable dans les mêmes conditions que la prime annuelle, on obtiendra la relation :

$$\Pi_g = a_g \varpi_g,$$

en exprimant simplement que les engagements de l'assureur restent identiques quel que soit le mode de payement des primes adopté par l'assuré.

Il peut arriver que la valeur de la prime unique ne soit pas indépendante de la valeur des primes annuelles susceptibles d'être versées. C'est ce qui se produit pour toutes les combinaisons avec contre-assurance. Il faut alors joindre à la relation précédente une deuxième relation entre ϖ et Π, relation qui dépend de la nature de l'assurance. (V. plus loin, page 173 et suivantes.)

Enfin, supposons que l'on convienne de payer chacune des primes annuelles en k termes égaux et également espacés, le premier terme de la première prime étant payable au début de l'assurance. Soit ϖ_k la valeur de la prime annuelle totale de la combinaison considérée (chaque terme de cette prime a pour valeur $\frac{\varpi_k}{k}$); on obtiendra sans peine les relations suivantes :

$$\Pi = \varpi_k \left(\frac{1}{k} + {}_k a_x \right),$$

dans le cas où le payement de la prime est viager, l'assurance reposant sur une tête d'âge x, et :

$$\Pi^{(n)} = \varpi_k^{(n)}\left[\frac{1}{k} + {}_k a_x^{(n)} - \frac{P_x^n}{k}\right] = \varpi_k^{(n)}\left[{}_k a_x^{(n)} + \frac{1}{k}\left(1 - P_x^n\right)\right]$$

si le paiement des primes est temporaire, le nombre des primes annuelles fractionnées étant n au maximum.

Si le paiement des primes était annuel, on aurait dans ces deux cas les relations :

$$\Pi = \varpi(1 + a_x),$$

$$\Pi^{(n)} = \varpi^{(n)}\left(1 + a_x^{(n-1)}\right).$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\varpi_k}{\varpi} = \frac{1 + a_x}{\frac{1}{k} + {}_k a_x}. \qquad (1)$$

$$\frac{\varpi_k^{(n)}}{\varpi^{(n)}} = \frac{1 + a_x^{(n-1)}}{{}_k a_x^{(n)} + \frac{1}{k}\left(1 - P_x^n\right)}. \qquad (2)$$

Si l'on adopte les formules habituelles :

$${}_k a_x = a_x + \frac{k-1}{2k}, \qquad {}_k a_x^{(n)} = a_x^{(n)} + \frac{k-1}{2k}\left(1 - P_x^n\right)$$

$$\frac{\varpi_k}{\varpi} = \frac{a_x + 1}{a_x + \frac{k+1}{2k}} = 1 + \frac{k-1}{2ka_x + k + 1},$$

$$\frac{\varpi_k^{(n)}}{\varpi^{(n)}} = \frac{a_x^{(n-1)} + 1}{a_x^{(n)} + \frac{k+1}{2k}\left(1 - P_x^n\right)}$$

$$= 1 + \frac{(k-1)\left(1 - P_x^n\right)}{2ka_x^{(n)} + (k+1)\left(1 - P_x^n\right)}.$$

$$= 1 + \frac{k-1}{\frac{2ka_x^{(n)}}{1 - P_x^n} + k + 1}.$$

On voit que ces rapports dépendent de l'âge x de la tête assurée et du nombre des primes à payer. Ils varient d'ailleurs assez lentement avec l'annuité viagère et en sens inverse de cette quantité.

En particulier, si les primes sont payables semestriellement ou trimestriellement, on a :

$$\frac{\varpi_2}{\varpi} = 1 + \frac{1}{4a_x + 3}; \quad \frac{\varpi_2^{(n)}}{\varpi^{(n)}} = 1 + \frac{1}{\frac{4a_x^{(n)}}{1 - P_x^n} + 3}.$$

$$\frac{\varpi_4}{\varpi} = 1 + \frac{3}{8a_x + 5}; \quad \frac{\varpi_4^{(n)}}{\varpi^{(n)}} = 1 + \frac{3}{\frac{8a_x^{(n)}}{1 - P_x^n} + 5}.$$

a_x varie entre des limites assez étroites : 1 à 22 environ. $\frac{\varpi_2}{\varpi}$ varie donc entre $1 + \frac{1}{7}$ et $1 + \frac{1}{91}$,

et $\frac{\varpi_4}{\varpi}$ entre $1+\frac{3}{13}$ et $1+\frac{3}{181}$. Cependant les Compagnies d'assurances sur la vie ont admis que ces rapports pouvaient être considérés comme constants et indépendants de l'âge de l'assuré. Elles se bornent à majorer de 2 ou 3 pour cent de leur valeur les primes annuelles lorsqu'elles sont payables semestriellement ou trimestriellement.

L'hypothèse est exacte lorsqu'il s'agit de personnes s'assurant à un âge voisin de 50 ans, et elle est admissible dans les limites de la vie humaine, étant donnée la faible amplitude des variations de $\frac{\varpi_k}{\varpi}$.

Si, passant à la limite, on imaginait que les primes soient payables à chaque instant, d'une façon continue, la valeur de la prime ϖ', payable ainsi pendant une année, serait liée à la valeur de la prime annuelle ϖ, payable au début de l'année, par la relation suivante, déduite de (1) :

$$\frac{\varpi'}{\varpi}=\frac{1+a_x}{\alpha_x},$$

α_x étant la valeur de l'annuité viagère continue. Cette relation pouvait d'ailleurs s'écrire *a priori* sous la forme $\varpi'\alpha_x=\varpi(1+a_x)$.

Calcul des annuités viagères. — Nous avons obtenu précédemment une formule de récurrence permettant de calculer de proche en proche les annuités

viagères sur une ou plusieurs têtes, et par conséquent de construire des tables d'annuités.

On peut se demander si, pour certaines formes d'équations de survie, on ne saurait obtenir l'expression de l'annuité viagère sous une forme algébrique.

Equation de survie de Moivre. — Supposons d'abord que la tête d'âge x considérée satisfasse à la loi de Moivre : $v_x = 86 - x$

$$a_x = \frac{v_{x+1}}{v_x}(1+i)^{-1} + \frac{v_{x+2}}{v_x}(1+i)^{-2} + \dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots + \frac{v_{85}}{v_x}(1+i)^{-(85-x)}$$

$$= \frac{85-x}{86-x}(1+i)^{-1} + \frac{84-x}{86-x}(1+i)^{-2} + \dots\dots$$

$$+ \frac{x+1-x}{86-x}(1+i)^{-(85-x)}$$

$$= \frac{1}{86-x}\Big[85(1+i)^{-1} + 84(1+i)^{-2} + \dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots + (x+1)(1+i)^{-(85-x)}$$

$$- x\left((1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-(85-x)}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{86-x}\Big[85(1+i)^{-1} + 84(1+i)^{-2} + \dots\dots\dots$$

$$+ \dots\dots\dots - x\frac{1-(1+i)^{-(85-x)}}{i}\Big]$$

Posons :

$$S = 85(1+i)^{-1} + 84(1+i)^{-2} + \dots \dots + (x+1)(1+i)^{-(85-x)}$$

$$S(1+i) = 85 + 84(1+i)^{-1} + \dots \dots + (x+1)(1+i)^{-(84-x)}$$

$$S(1+i) - S = 85 - (1+i)^{-1} - (1+i)^{-2} - \dots - (1+i)^{-(84-x)} - (x+1)(1+i)^{-(85-x)}$$

$$Si = 85 - \frac{1-(1+i)^{-(84-x)}}{i} - (x+1)(1+i)^{-(85-x)}$$

$$= 85 - \frac{1}{i} - \left(x - \frac{1}{i}\right)(1+i)^{-(85-x)}$$

$$S = \frac{85i-1}{i^2} - \frac{xi-1}{i^2}(1+i)^{-(85-x)}$$

$$a_x = \frac{1}{i^2(86-x)}\Big[85i - 1 - (xi-1)(1+i)^{-(85-x)} - xi\left(1-(1+i)^{-(85-x)}\right)\Big].$$

$$a_x = \frac{(85-x)\,i - 1 + (1+i)^{-(85-x)}}{i^2(86-x)}.$$

Telle est l'expression simple de a_x.

Équation de M. Laurent. — Si la loi de survie adoptée est celle de M. Laurent, on peut obtenir aussi

facilement une expression analytique de l'annuité viagère :

$$v_x = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + \ldots$$

$$a_x = \frac{1}{Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots}\left[\left(Ae^{\alpha(x+1)} + Be^{\beta(x+1)} + \ldots\right)(1+i)^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

$$a_x = \frac{(1+i)^x}{Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots}\left[\frac{Ae^{\alpha(x+1)}}{(1+i)^{x+1}} + \frac{Ae^{\alpha(x+2)}}{(1+i)^{x+2}} + \ldots + \frac{Be^{\beta(x+1)}}{(1+i)^{x+1}} + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

$$= \frac{(1+i)^x}{Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots}\left[A\left\{\left(\frac{e^\alpha}{1+i}\right)^{x+1} + \left(\frac{e^\alpha}{1+i}\right)^{x+2} + \ldots\right\} + B\left\{\left(\frac{e^\beta}{1+i}\right)^{x+1} + \ldots\ldots\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right].$$

Il suffit de faire la somme de progressions géométriques décroissantes [1].

Les autres lois de survie, et en particulier celles qui sont le plus fréquemment usitées, ne se prêtent pas à des calculs aussi simples. Les deux lois précédentes sont les seules qui conduisent, pour le calcul de l'annuité viagère, à la sommation de progressions géométriques décroissantes : la première est abandonnée

[1] Car α, β, γ,... sont évidemment des quantités négatives.

depuis longtemps; la seconde est, à plus d'un titre, intéressante et pourrait certainement conduire à des applications pratiques et à des interpolations satisfaisantes de tables d'expérience.

Tables d'annuités viagères. — Quoi qu'il en soit, on a reconnu depuis longtemps la nécessité d'éviter la répétition de calculs aussi longs et fastidieux que ceux que nécessite la connaissance de la valeur des annuités viagères aux différents âges, connaissance indispensable pour effectuer le calcul des primes pures des diverses combinaisons d'assurances sur la vie. Aussi a-t-on été amené à dresser des tables d'annuités viagères sur une ou plusieurs têtes, et l'ajustement des tables de mortalité au moyen des équations de Gompertz et de Makeham se prêtait singulièrement à l'établissement de ces tables d'annuités, puisque leur nombre se réduit alors à une ou à quelques-unes seulement, grâce à la loi du vieillissement uniforme.

En France et à l'étranger, on a donc construit des tables d'annuités viagères. Le volume des tables du Comité des Compagnies françaises, en particulier, comprend, à des taux d'intérêt variant entre 2 et 4 %, des tables d'annuités viagères sur 1, 2, ... 9 têtes, toutes de même âge, desquelles on peut déduire les valeurs d'annuités viagères reposant sur 1, 2,.... 9 têtes d'âges quelconques. Elles contiennent en outre des tables d'annuités temporaires et des tables à double entrée d'annuités viagères sur deux têtes d'âges quelconques pour les taux d'intérêt ci-dessus. La construction de ces différentes tables a été faite au moyen des formules de récurrence indiquées page 105.

Commutations. — Mais la connaissance des annuités viagères à termes constants ne suffit pas au calcul des primes pures. Nous avons déjà rencontré d'autres éléments, tels que les capitaux différés, les annuités différées, les annuités dont les termes varient en progression arithmétique, etc. Les combinaisons d'assurances en cas de décès nous conduiront au calcul d'un grand nombre d'expressions du même genre. On pourrait construire des tables de ces différentes expressions, tout comme on a construit des tables d'annuités viagères. Mais le nombre de ces tables deviendrait rapidement très grand et augmenterait au fur et à mesure de l'adoption de combinaisons nouvelles.

Tetens a le premier montré, en 1785, que, quelle que soit la loi de survie adoptée, on peut à l'aide de six tables seulement, pour un taux d'intérêt déterminé, calculer, d'une manière aisée et rapide, les primes pures de toutes les combinaisons reposant sur une seule tête. Combinées avec des tables d'annuités viagères sur plusieurs têtes, elles permettront de calculer les primes pures de toutes les combinaisons usuelles.

Les six tables de Tetens se nomment aujourd'hui *tables de commutation*. Trois servent au calcul des primes des combinaisons en cas de vie; les trois autres sont relatives aux combinaisons en cas de décès.

Après plusieurs essais, plutôt malheureux, de modifications au système primitif de Tetens, on en est revenu à ce dernier, qui a été utilisé par les Compagnies françaises lors de la construction des tables du Comité.

Assurances en cas de vie. — L'expression de

la valeur actuelle du capital 1 différé de n années est, on s'en souvient :

$$P_x^n = \frac{v_{x+n}}{v_x}(1+i)^{-n}.$$

Posons : $D_x = v_x(1+i)^{-x}$.

Nous aurons : $P_x^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}$.

Si l'on construit la table des D_x qui correspond au taux d'intérêt i adopté et à la table de survie choisie, le calcul des capitaux différés se réduira à de simples divisions. Si, au lieu de construire la table des D_x, on a dressé la table des logarithmes de ces mêmes quantités, de simples soustractions donneront les logs des capitaux différés.

L'annuité viagère a_x a pour expression :

$$a_x = P_x^1 + P_x^2 + \dots + P_x^n + \dots\dots\dots$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n} + \dots}{D_x} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} D_{x+n}}{D_x}.$$

Posons : $\sum_{n=1}^{n=\infty} D_{x+n} = N_{x+1}$,

et construisons une table des quantités telles que N_{x+1}.

L'annuité viagère a_x s'écrit : $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$,

et le calcul en est immédiat.

Les annuités différées et temporaires s'expriment au moyen des N et des D :

$$a_x^n = a_{x+n} P_x^n = \frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x},$$

$$a_x^{(n)} = a_x - a_x^n = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Dans le calcul des primes annuelles on a fréquemment besoin des quantités $(1+a_x)$ ou $(1+a_x^{(n-1)})$:

$$1+a_x=\frac{N_x}{D_x} \qquad 1+a_x^{(n-1)}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}.$$

Enfin, considérons l'annuité viagère dont les termes varient en progression arithmétique et sont successivement égaux à 1, 2, ... n. Nous avons précédemment calculé la valeur actuelle d'une telle suite de payements viagers en fonction des annuités a :

$$\begin{aligned} A_x &= P_x^1+2\,P_x^2+\ldots+n\,P_x^n+\ldots \\ &= a_x+a_x^1+\ldots\ldots+a_x^{n-1}+\ldots, \\ &= \frac{N_{x+1}+N_{x+2}+\ldots+N_{x+n}+\ldots}{D_x}. \end{aligned}$$

Posons $\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} N_{x+n}=S_{x+1},$

nous aurons : $\quad A_x=\frac{S_{x+1}}{D_x},$

et il suffira de construire une table des S pour obtenir immédiatement la valeur de A_x quand l'âge x est donné.

On obtient aisément les expressions de $A_x^n, A_x^{(n)}$:

$$A_x^n=A_{x+n}\,P_x^n=\frac{S_{x+n+1}}{D_x},$$

$$A_x^{(n)}=A_x-A_x^n-na_x^n=\frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-nN_{x+n+1}}{D_x}.$$

Les trois tables des quantités D, N, S, constituent les

tables de commutation relatives aux combinaisons en cas de vie : capitaux différés et rentes.

Assurances en cas de décès. — Supposons que le capital 1 soit payable au décès de la tête d'âge x si ce décès se produit pendant le cours de la $(n+1)^{e}$ année à partir de l'instant présent et supposons, pour rendre possible le calcul de la valeur actuelle de ce capital, que le décès ait lieu au milieu de cette $(n+1)^{e}$ année. La prime unique de cette combinaison, payable au moment de la conclusion du contrat, a pour valeur :

$$\frac{v_{x+n}-v_{x+n+1}}{v_x}(1+i)^{-n-\frac{1}{2}}=\frac{(v_{x+n}-v_{x+n+1})(1+i)^{-n-x-\frac{1}{2}}}{v_x(1+i)^{-x}}.$$

Si l'on désigne par C_x l'expression suivante :

$$C_x=(v_x-v_{x+1})(1+i)^{-x-\frac{1}{2}},$$

la prime unique calculée ci-dessus sera égale à $\frac{C_{x+n}}{D_x}$.

Si le capital 1 est payable dans le seul cas où le décès de la tête x se produit pendant l'intervalle $(x+n)$ à $(x+n+k)$, sa valeur actuelle est :

$$\frac{C_{x+n}+\dots+C_{x+n+k-1}}{D_x}$$

$$=\frac{C_{x+n}+C_{x+n+1}+\dots-(C_{x+n+k}+C_{x+n+k+1}+\dots)}{D_x}.$$

Lorsqu'il s'agit d'une assurance immédiate sur la vie entière de la tête d'âge x, la valeur actuelle du capital 1, payable au décès, s'écrit :

$$\frac{C_x+C_{x+1}+\dots\dots}{D_x}.$$

Si l'on pose :

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_{x+n},$$

les formules précédentes s'écrivent respectivement :

$$\frac{M_{x+n} - M_{x+n+k}}{D_x},$$

et :

$$\frac{M_x}{D_x}.$$

La prime unique d'une semblable assurance vie entière au capital 1 différée de n années serait :

$$\frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + \dots}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x},$$

et celle d'une assurance immédiate, mais temporaire de n années :

$$\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Supposons enfin que le capital assuré croisse d'année en année en progression arithmétique, qu'il soit égal à 1 la première année, à 2 la deuxième, etc., à n la n^e. Cette combinaison équivaut à une série d'assurances au capital égal à l'unité, souscrites pour la durée entière de la vie de la tête x considérée, la première assurance étant immédiate, la deuxième différée d'une année, etc. La prime unique s'écrit donc :

$$\frac{M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots + M_{x+n} + \dots}{D_x}.$$

Si l'on pose : $M_x + M_{x+1} + \dots = R_x$,

on obtiendra, en calculant les valeurs successives de R_x pour $x = 1, 2, \dots n$, une nouvelle table de commu-

tation présentant une certaine analogie avec la table des S. La prime unique de la combinaison étudiée s'écrit :

$$\frac{R_x}{D_x}.$$

Si l'assurance est de même nature, mais temporaire d'une durée de n années, c'est-à-dire si le capital payable en cas de décès est 1 la première année, 2 la seconde, ..., n la n^e, aucun capital n'étant dû si le décès survient pendant le cours d'une année ultérieure, la prime unique sera :

$$\frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.$$

En effet, $\frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}$ est la différence entre les primes uniques de deux assurances de capitaux égaux successivement à 1, 2, ... k, ... la première étant immédiate et la deuxième différée de n années. C'est donc la prime unique de l'assurance de capitaux successivement égaux à 1, 2, ... n les n premières années, le capital assuré devenant constant et égal à n à partir de la n^e année. Pour obtenir la prime unique de la combinaison considérée, il faut retrancher de la quantité $\frac{R_x - R_{x+n}}{D_x}$ la prime unique de l'assurance vie entière d'un capital n différée de n années, soit $\frac{nM_{x+n}}{D_x}$.

Calcul des primes annuelles. — Si les primes des combinaisons précédentes sont annuelles, constantes et payables en une seule fois au commencement

de l'année pendant toute la durée du contrat, on obtient, en se reportant aux résultats obtenus au chapitre précédent :

Pour l'assurance-vie entière immédiate (capital 1):

$$\frac{M_x}{D_x} \times \frac{D_x}{N_x} = \frac{M_x}{N_x};$$

Pour l'assurance-vie entière différée de n années (capital 1): $\frac{M_{x+n}}{N_x}$;

Pour l'assurance-vie entière d'un capital croissant en progression arithmétique (capitaux 1,2, ...) : $\frac{R_x}{N_x}$.

Si les primes sont annuelles et constantes, mais payables pendant p années seulement, elles se calculent au moyen des relations suivantes :

Pour l'assurance-vie entière (capital 1) :

$$\frac{M_x}{N_x - N_{x+p}} \text{ (immédiate),}$$

ou

$$\frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+p}} \text{ (différée de } n \text{ années);}$$

Pour l'assurance vie entière de capitaux 1,2, ... n :

$$\frac{R_x}{N_x - N_{x+p}}.$$

Pour l'assurance temporaire de n années d'un capital croissant en progression arithmétique : 1,2 ... n :

$$\frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{N_x - N_{x+p}}, \quad p \leqq n.$$

On voit que, quelles que soient la table de mortalité adoptée et la méthode d'ajustement employée, on peut construire six tables de commutation, analogues deux

à deux : les tables des D, N, S, d'une part, des C, M, R, d'autre part, permettant de calculer très rapidement les primes d'assurances, en cas de vie ou en cas de décès, reposant sur une seule tête.

On pourrait également construire des tables de commutation relatives aux différents cas de groupes sans réversion, qui peuvent se présenter, et en déduire les primes d'assurances reposant sur un nombre de têtes quelconque ; mais le nombre des tables nécessaires deviendrait rapidement très considérable, et on préfère construire des tables d'annuités viagères sur plusieurs têtes, tables qui se réduisent à quelques-unes *relatives à des têtes du même âge*, lorsque la table de survie a été ajustée au moyen de l'équation de Makeham.

Changement de taux dans les annuités viagères. — Dans la construction de tables telles que celles du Comité, où les quantités D, N, S, C, M, R et les annuités viagères sont calculées à des taux différents : 2, $2\,^1/_4$, $2\,^1/_2$, ... 4 %, la tâche serait beaucoup facilitée si, par un calcul simple, on pouvait passer des résultats obtenus à un certain taux i, aux résultats analogues obtenus à un autre taux i', la loi de mortalité restant la même dans les deux cas.

Or
$$\frac{D_x}{D'_x} = \left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{-x}$$

$$\frac{N_x}{N'_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots\ldots}{D'_x + D'_{x+1} + \ldots}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots}{D_x\left(\frac{1+i'}{1+i}\right)^{-x} + \ldots} = \frac{v_x(1+i)^{-x} + \ldots}{v_x(1+i')^{-x} + \ldots}.$$

On voit que le calcul de N'_x, dans le cas où la loi de survie est quelconque, n'est pas du tout facilité par la connaissance préalable de la même quantité calculée à l'aide d'un taux différent.

M. Achard (*Bulletin de l'Institut des actuaires français*, n° 7) a montré que, si l'on adopte l'équation de survie suivante, extension de celle de Moivre :

$$v_x = (\omega - x)^m$$

(ω étant l'âge extrême de la table), la table des annuités viagères à un taux i' se déduit aisément de la table des mêmes annuités au taux i.

L'annuité viagère continue a pour expression, à l'âge x, en supposant vérifiée la loi de M. Achard :

$$\alpha_x = \int_0^{\omega - x} \frac{v_{x+t}}{v_x}(1+i)^{-t}dt$$

$$= \int_0^{\omega - x} \frac{(\omega - x - t)^m}{(\omega - x)^m}(1+i)^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{(1+i)^{\omega - x}(\omega - x)^m}\int_0^{\omega - x}(\omega - x - t)^m(1+i)^{\omega - x - t}dt.$$

Si ι est le taux d'intérêt continu correspondant à i :

$$\iota = \log(1+i),$$

et si l'on effectue le changement de variable :

$$\iota(\omega - x - t) = \rho,$$

l'expression précédente devient :

$$\alpha_x = \frac{1}{\iota^{m+1}e^{(\omega - x)\iota}(\omega - x)^m}\int_0^{(\omega - x)\iota}\rho^m e^{\rho}d\rho,$$

ce qui donne :

$$\alpha_x \iota = \frac{1}{e^{(\omega-x)\iota}[\iota(\omega-x)]^m} \int_0^{(\omega-x)\iota} \rho^m e^\rho d\rho = F[\iota(\omega-x)].$$

$\alpha_x \iota$ est fonction de $\iota(\omega - x)$ seulement. Si ι varie, mais si la quantité $\iota(\omega - x)$ reste constante, $\alpha_x \iota$ ne changera pas. Supposons donc α_x connu, et soit ι' un autre taux. Déterminons un âge x' par la relation

$$\iota(\omega - x) = \iota'(\omega - x').$$

L'annuité viagère continue à cet âge et au taux ι' sera :

$$\alpha_x' = \frac{\alpha_x \iota}{\iota'}.$$

De l'annuité continue, on déduira l'annuité ordinaire à terme annuel au moyen des formules obtenues précédemment (page 116). En particulier on peut prendre :

$$\alpha_x = a_x + \frac{1}{2}.$$

M. Achard a montré que sa loi est la seule qui jouisse de cette propriété[1]. La relation

$$\alpha_x \iota = F\left[\iota(\omega - x)\right],$$

conduit en effet à l'équation différentielle :

$$\frac{d\left[\varkappa_x(\omega - x)\right]}{d(\omega - x)} = 0,$$

[1] M. Poterin du Motel fait justement remarquer que cette propriété s'étend à la loi :

$$v_x = e^{-kx}(\omega - x)^m$$

Les relations précédentes s'écrivent alors :

$$(\iota + k)(\omega - x) = (\iota' + k)(\omega - x')$$

$$\alpha'_x = \frac{\iota + k}{\iota' + k}\alpha_x.$$

Poterin du Motel, 2, page 201.

qui donne : $\varkappa_x = \frac{m}{\omega - x}$,

et par suite : $v_x = A(\omega - x)^m$,

expression analytique de la loi étudiée par M. Achard.

G. — ASSURANCES EN CAS DE VIE

CAPITAL DIFFÉRÉ

Nous avons déjà calculé précédemment la valeur actuelle d'un capital différé, c'est-à-dire la prime unique de l'assurance d'un capital égal à l'unité payable en cas de vie de la tête d'âge x dans n années :

$$P_x^n = \frac{v_{x+n}}{v_x}(1+i)^{-n} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

La prime annuelle constante ϖ, payable au début de chaque année pendant les n années du différé, a pour valeur :

$$\varpi = \frac{P_x^n}{1 + a_x^{(n-1)}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

Si l'assurance repose sur un groupe de têtes, le capital peut être différé sans réversion ou avec réversion, c'est-à-dire qu'il est payable soit lorsque toutes les têtes sans exception vivent à l'échéance, soit lors-

qu'une au moins survit à cette époque. Lorsqu'il s'agit d'un groupe de deux têtes, nous avons obtenu précédemment les relations :

$$P^n_{xy} = P^n_x P^n_y (1 + i)^n$$

$$P^n_{\overline{xy}} = P^n_x + P^n_y - P^n_{xy}.$$

La prime unique du capital différé avec réversion est évidemment supérieure à celle du capital différé sans réversion, c'est-à-dire que :

$$P^n_{\overline{xy}} > P^n_{xy},$$

car la prime est d'autant plus forte que le capital a plus de chances d'être payé à l'échéance.

Lorsque la prime est annuelle, elle ne peut être naturellement exigible dans le cas d'une assurance sans réversion qu'autant que le groupe considéré existe. Quand une seule tête meurt avant l'accomplissement du différé, le versement des primes cesse, puisqu'il n'a plus d'objet, les obligations de l'assureur s'étant annulées brusquement.

On peut stipuler, au contraire, que les primes annuelles d'un contrat avec réversion seront payables jusqu'au premier ou jusqu'au dernier décès qui se produira parmi les têtes du groupe. Mais si l'on se trouve dans ce dernier cas, et si les primes sont constantes, il pourra se faire qu'une ou plusieurs têtes étant décédées, les survivants trouvent avantage à résilier leur contrat et à en souscrire un nouveau, garantissant le même risque, et cependant à prime moins élevée.

Prenons par exemple le cas de deux têtes (x, y), et soit :

$$\varpi = \frac{P^n_{\overline{xy}}}{1 + a^{(n-1)}_{\overline{xy}}},$$

la prime constante de l'assurance avec réversion d'un capital égal à l'unité. Supposons que la tête x meure au bout de la $k^{\text{ième}}$ année, avant le terme du contrat. L'assuré y pourra abandonner son ancienne police et en souscrire une nouvelle lui assurant les mêmes avantages. La nouvelle prime annuelle qu'il aura à payer sera :

$$\varpi' = \frac{P^{n-k}_{y+k}}{1 + a^{(n-k-1)}_{y+k}}.$$

Or il peut arriver que la prime ϖ' soit inférieure à la prime initiale ϖ et qu'il y ait, par conséquent, avantage pour l'assuré à abandonner son contrat pour en souscrire un nouveau, de prime moindre, garantissant le même risque. Des exemples convenablement choisis permettent de s'en convaincre.

D'ailleurs, la police abandonnée n'est pas résiliée, mais réduite; elle continue à suivre son cours, mais n'assure plus qu'une partie du capital primitif : la réserve du contrat, en effet, appartient à l'assuré, comme on le verra plus loin, et, sauf payement d'une indemnité de résiliation, les Compagnies ne contestent pas les droits de l'assuré sur cette réserve. Il suffira donc à celui-ci de signer un nouveau contrat d'une durée de $(n - k)$ années pour une somme égale à la différence entre le capital primitivement assuré et le capital de réduction.

La prime annuelle nouvelle pourra donc être inférieure à l'ancienne, et c'est une anomalie, puisque les engagements de l'assuré ont pu varier sans qu'aient changé ceux de l'assureur.

Un tel contrat ne doit pas être souscrit à prime annuelle constante pendant toute sa durée. Il faut en calculer les primes annuelles au moyen de la formule :

$$\varpi = \frac{P^n_x}{1 + a^{(n-1)}_x} + \frac{P^n_y}{1 + a^{(n-1)}_y} - \frac{P^n_{xy}}{1 + a^{(n-1)}_{xy}}.$$

Si les deux têtes vivent, en effet, le capital assuré est égal à l'unité et différé de n années. Si l'une des deux têtes meurt, on voit, à la seule inspection de la formule précédente, que la prime se réduit à celle qui assurerait le même capital différé reposant sur la tête survivante seule.

RENTES VIAGÈRES

Les rentes viagères peuvent être immédiates ou différées. La rente est immédiate lorsque l'entrée en jouisssance est immédiate, c'est-à-dire lorsque le premier terme de la rente est payable à la fin de la première période, celle-ci ayant commencé au moment même de la souscription du contrat. La prime, payable généralement à cette même époque, ne saurait être autre chose qu'une prime unique, car il ne serait pas logique que le rentier continuât à payer des primes alors qu'il jouit déjà des avantages stipulés au contrat. Cette prime unique ne diffère évidemment pas de la valeur de l'annuité viagère à l'âge considéré, multi-

pliée par le terme annuel r_a de la rente. Les rentes sont généralement payables semestriellement ou trimestriellement : on prend pour valeur de la prime unique, suivant le cas :

$$2r_s(a_x + 0,25) \quad \text{ou} \quad 4r_t(a_x + 0,375),$$

r_s et r_t étant les valeurs du terme semestriel ou trimestriel de la rente.

Il peut être stipulé que la rente ne sera payée au rentier qu'en cas de vie pendant les n années qui suivront la souscription du contrat. La rente est alors temporaire, et il suffit, dans l'expression de la prime unique, de remplacer l'annuité viagère ordinaire par l'annuité temporaire $a_x^{(n)}$. Ainsi la prime unique d'une rente viagère immédiate, temporaire de n années, et payable par trimestres, r_t étant le terme trimestriel de la rente et x l'âge du rentier au moment de la souscription du contrat, est :

$$4r_t\left(a_x^{(n)} + 0,375\left(1 - P_x^n\right)\right)$$

$$\text{ou} \quad 4r_t\left[\frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} + 0.375\,\frac{D_x - D_{x+n}}{D_x}\right]$$

La rente viagère est différée de n années lorsque l'entrée en jouissance a lieu n années après la souscription du contrat : si la rente est annuelle, le paiement du premier terme coïncide donc avec la fin de la n^e année ou le commencement de la $(n+1)^e$. Dans ce cas, la prime peut être annuelle et temporaire. Il peut être payé au maximum $(n+1)$ primes : le paiement de la dernière prime coïncide alors avec celui du premier terme annuel de la rente.

Généralement, la prime annuelle d'une rente différée de n années est payable pendant la durée du différé, c'est-à-dire que le contractant aura au plus n primes à verser. La valeur d'une de ces primes annuelles est, en conservant les notations précédentes :

$$\varpi = r_a \frac{a_x^n}{1 + a_x^{(n-1)}} = r_a \frac{N_{x+n+1}}{N_x - N_{x+n}},$$

si la rente est payable annuellement, et :

$$\varpi = kr_k \frac{a_x^n + \frac{k-1}{2k} P_x^n}{1 + a_x^{(n-1)}} = kr_k \frac{N_{x+n+1} + \frac{k-1}{2k} D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

si la rente est payable par $k^{ièmes}$ d'année.

Sauf stipulation contraire, les rentes sont sans arrérages au décès; il n'est rien payé pour la période pendant laquelle survient le décès. Nous verrons plus loin au chapitre relatif aux combinaisons diverses (*Rentes servies par la Caisse nationale des Retraites*), comment on calculerait la prime dans le cas où la portion d'arrérages courue à l'époque du décès serait due aux héritiers (page 187).

Rentes réversibles. — Jusqu'ici, nous avons considéré des rentes immédiates ou différées sur une seule tête. Les rentes peuvent être servies périodiquement pendant toute la durée de vie d'un groupe quelconque. Si, en particulier, on considère un groupe de deux têtes d'âges x et y, la rente peut être payable jusqu'au premier ou jusqu'au dernier décès. Lorsqu'elle est payable jusqu'au dernier décès, la rente

est dite *totalement réversible*. La rente peut n'être que partiellement réversible : au premier décès, elle sera, par exemple, réduite du quart, de la moitié, etc.

La prime unique d'une rente annuelle immédiate r_a, reposant sur la vie d'un groupe (x, y) s'éteignant au premier décès, s'écrit :

$$r_a a_{xy},$$

et celle d'une rente totalement réversible :

$$r_a a_{\overline{xy}} = r_a\left(a_x + a_y - a_{xy}\right).$$

Sans chercher à retenir la formule qui donne $a_{\overline{xy}}$, en fonction de a_x, a_y, a_{xy}, on peut établir la relation précédente en remarquant que la prime unique nécessaire pour constituer sur chacune des têtes (x, y) une rente de terme annuel égal à r_a est $r_a\left(a_x + a_y\right)$, et il suffit de retrancher de cette expression la valeur actuelle d'une rente r_a, qui serait servie annuellement pendant toute la durée de la vie commune de x et y, soit $r_a a_{xy}$.

Un raisonnement analogue permet de calculer la prime unique d'une rente immédiate partiellement réversible. Supposons qu'une rente annuelle de terme r_a soit servie pendant toute la durée de la vie commune de trois têtes d'âges (x, y, z), que la rente devienne r'_a, quand une des trois têtes est morte, et r''_a quand une seule tête survit. Si une rente égale à r''_a était servie à chacune des trois têtes pendant sa vie entière, la prime de la combinaison serait égale à :

$$\Pi_1 = r''_a\left(a_x + a_y + a_z\right).$$

Mais en cas de vie de deux des têtes seulement, la rente se réduit à r'_a, alors que la formule précédente donnerait $2r''_a$. Il faut donc retrancher de Π_1 la valeur de la rente $\left(2r''_a - r'_a\right)$ servie tant que deux des trois têtes vivront :

$$\Pi_2 = r''_a\left(a_x + a_y + a_z\right) - \left(2r''_a - r'_a\right)\left(a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}\right)$$

Enfin, si les trois têtes vivent, la rente sera r_a et non $3\left(r'_a - r''_a\right)$, valeur que donnerait dans ce cas l'expression précédente. Il faut donc retrancher de Π_2 la valeur de la rente $\left[3\left(r'_a - r''_a\right) - r_a\right]$ servie pendant la durée de vie commune des trois têtes. La prime cherchée est donc :

$$\Pi = r''_a\left(a_x + a_y + a_z\right) - \left(2r''_a - r'_a\right)\left(a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}\right) - \left[3\left(r'_a - r''_a\right) - r_a\right]a_{xyz}. \qquad (1)$$

La valeur de la rente dépend fréquemment de la tête qui subsiste. Ainsi la rente du mari peut être réversible pour moitié sur la tête de son conjoint. La mort de la femme n'a alors aucune influence sur la valeur de la rente.

Reprenons l'exemple de trois têtes d'âges (x, y, z), en supposant que la rente soit annuelle, le terme de cette rente étant r_{xyz} quand les trois têtes vivent, r_{xy} si x et y subsistent seules, r_{yz} si x seul est décédé, et r_{zx} lorsque y meurt ; enfin r_x, r_y, r_z en cas de survie de l'une des têtes x, y, z, après la mort des deux

autres. En raisonnant comme précédemment, nous voyons qu'une prime unique égale à :

$$r_x a_x + r_y a_y + r_z a_z$$

assurerait à la dernière tête survivante la rente à laquelle elle a droit. Si deux têtes x et y, par exemple, subsistent, le terme de la rente ne doit pas être égal à $(r_x + r_y)$, mais à r_{xy}. Il faut donc retrancher de l'expression ci-dessus la somme des trois expressions analogues à : $(r_x + r_y - r_{xy})\, a_{xy}$.

En continuant le raisonnement, on trouve pour valeur de la prime unique cherchée :

$$\begin{aligned} \Pi = r_x a_x + r_y a_y + r_z a_z - (r_x + r_y - r_{xy})\, a_{xy} \\ - (r_y + r_z - r_{yz})\, a_{yz} - (r_z + r_x - r_{zx})\, a_{zx} \\ + (r_x + r_y + r_z - r_{xy} - r_{yz} - r_{zx} + r_{xyz})\, a_{xyz}. \quad (2) \end{aligned}$$

Tous ces raisonnements et formules sont évidemment applicables au cas de rentes dont les termes sont servis par fractions de l'unité de temps employée pour la table de mortalité et au cas de rentes différées ou temporaires, par la simple substitution des valeurs convenables pour les annuités viagères et pour les quantités telles que r_x, r_y, r_{xy}, etc., qui, dans le cas d'une rente servie en k termes par période, seront prises égales à k fois le terme de la rente.

On peut remarquer que rien, dans les formules qui précèdent, ne laisse supposer qu'il s'agisse d'une diminution ou d'une augmentation de la rente primitive, puisqu'il n'a été fait aucune hypothèse sur les valeurs respectives des différentes quantités r_x, r_y,...

Toutes les fois qu'il s'agit d'une rente différée reposant sur plusieurs têtes et réversible, si le contrat est souscrit à prime annuelle, l'assureur ne doit pas consentir une prime constante, pour les raisons qui ont été déjà exposées à propos des capitaux différés avec réversion. Il peut, en effet, en cas de décès de l'une des têtes pendant la durée du différé, devenir avantageux pour les survivants de résilier le contrat primitif pour en souscrire un nouveau leur offrant les mêmes avantages, mais de prime moins élevée. On tourne la difficulté comme dans le cas des assurances de capitaux différés, en décomposant le contrat.

Ainsi la prime unique d'une rente viagère annuelle, égale à l'unité réversible sur deux têtes et différée de n années, a pour valeur :

$$a^n_{\overline{xy}} = a^n_x + a^n_y - a^n_{xy},$$

et la prime annuelle constante payable pendant toute la durée du différé serait égale à :

$$\frac{a^n_{\overline{xy}}}{1 + a^{(n-1)}_{\overline{xy}}} = \frac{a^n_x + a^n_y - a^n_{xy}}{1 + a^{(n-1)}_{\overline{xy}}}.$$

Si l'on prend comme valeur de la prime annuelle :

$$\varpi = \frac{a^n_x}{1 + a^{(n-1)}_x} + \frac{a^n_y}{1 + a^{(n-1)}_y} - \frac{a^n_{xy}}{1 + a^{(n-1)}_{xy}},$$

cette prime assurera aux têtes x et y au bout de n années une rente viagère annuelle égale à l'unité et réversible totalement; si l'une des têtes, y par exemple, vient à mourir pendant les n premières années du contrat, la prime se ramène à celle qui assurerait la

même rente viagère à la tête survivante au bout de n années, et cette dernière n'a aucun intérêt à résilier son contrat.

Rentes de survie. — La rente est dite *de survie* quand le service de cette rente ne commence qu'après le décès d'une ou plusieurs têtes désignées. On déduit facilement la prime unique d'une telle combinaison des formules (1) et (2) relatives aux rentes réversibles.

Prenons le cas de deux têtes d'âges x et y. La relation :

$$\Pi = r_x a_x + r_y a_y - (r_x + r_y - r_{xy}) a_{xy} \qquad (2)$$

donne l'expression de la prime unique assurant le service d'une rente r_{xy} tant que les deux têtes vivront simultanément, et d'une rente r_x ou r_y suivant que la tête x ou la tête y survivra.

Pour obtenir la valeur de la prime unique d'une rente de survie r_y servie viagèrement à y si cette tête survit à x, il suffit de remplacer dans la formule précédente r_x et r_{xy} par zéro, ce qui donne :

$$\Pi_1 = r_y(a_y - a_{xy}).$$

Si le service de la rente de terme r devait commencer après le premier décès, quel qu'il soit, du groupe constitué par les deux têtes x et y, la rente de survie serait dite *réciproque*, et l'on obtiendrait la prime unique correspondante en partant de la relation (1) écrite dans le cas de deux têtes :

$$\Pi = r''(a_x + a_y) - (2r'' - r')a_{xy},$$

et en y remplaçant r'' par r et r' par zéro, ce qui donne :

$$\Pi' = r\,(a_x + a_y - 2a_{xy}).$$

Il est tout aussi facile de passer des formules relatives aux rentes réversibles à celles qui s'appliquent aux rentes de survie lorsque les groupes considérés se composent d'un plus grand nombre de têtes. Ainsi, supposons qu'il s'agisse d'un groupe de trois têtes x, y, z. La prime unique destinée à assurer le service d'une rente r après le décès de la tête x, tant que y et z subsisteront toutes deux, s'obtiendra en faisant, dans la relation (2) :

$$r_x = r_y = r_z = r_{xy} = r_{xz} = r_{xyz} = 0$$

et $\quad r_{yz} = r$,

ce qui donne : $\quad \Pi_1 = r(a_{yz} - a_{xyz})$.

Si la rente est servie, après le décès de x, tant qu'une au moins des deux têtes survivra, il suffira, dans la relation (2), de faire :

$$r_y = r_z = r_{yz} = r \qquad \text{et } r_x = r_{xy} = r_{xz} = r_{xyz} = 0,$$

pour obtenir la valeur de la prime unique :

$$\Pi_2 = r(a_y + a_z - a_{xy} - a_{yz} - a_{zx} + a_{xyz}).$$

Si la rente est servie après le dernier décès de x et y tant que z survivra, on obtiendra la valeur de la prime unique en faisant :

$$r_x = r_y = r_{xy} = r_{xz} = r_{yz} = r_{xyz} = 0, \quad r_z = r,$$

ce qui donne :

$$\Pi_3 = r\,(a_z - a_{yz} - a_{zx} + a_{xyz}).$$

La relation (1) conduit tout aussi aisément à l'expression de la prime unique d'une rente payable après la mort d'une quelconque des trois têtes jusqu'au premier ou jusqu'au dernier décès du groupe restant.

Dans le premier cas, $r_a = r''_a = 0 \quad r'_a = r,$
et la prime unique est :

$$\Pi_4 = r(a_{xy} + a_{yz} + a_{zx} - 3a_{xyz}),$$

et dans le second cas, $r_a = 0 \quad r'_a = r''_a = r,$

$$\Pi_5 = r(a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{yz} - a_{zx}).$$

Si enfin la rente est payable après les deux premiers décès quels qu'ils soient, jusqu'au décès de la troisième tête, on posera :

$$r_a = r'_a = 0 \qquad r''_a = r,$$

et on obtiendra :

$$\Pi_6 = r[a_x + a_y + a_z - 2(a_{xy} + a_{yz} + a_{zx}) + 3a_{xyz}].$$

On voit que les formules analogues à (1) et (2), écrites dans le cas d'un nombre de têtes quelconque, conduiront rapidement à l'expression de toutes les rentes de survie que l'on pourra imaginer, reposant sur un groupe composé du même nombre de têtes ou d'un nombre moindre.

Le même résultat pourrait être obtenu au moyen du raisonnement direct suivant :

Supposons qu'une rente de survie R soit servie viagèrement à un groupe Γ après le décès d'un groupe G, les deux groupes étant d'ailleurs absolument quelconques. Si la rente était servie pendant toute la durée de la vie du groupe Γ, la prime unique correspondante serait $R.a_\Gamma$. Il faut en retrancher la valeur de la rente viagère R servie pendant la durée de vie simultanée de G et de Γ, soit $R.\ a_{G,\Gamma}$, ce qui donne :

$$R(a_\Gamma - a_{G,\Gamma}),$$

valeur que l'on désigne souvent par la notation $R.\ a_{\frac{G}{\Gamma}}$.

En particulier, si le groupe G se réduit à la tête x, et Γ à la tête y, on retrouve bien la relation déjà obtenue plus haut :

$$ra_{\frac{x}{y}} = r(a_y - a_{xy})$$

Le cas d'une rente de survie réciproque se traite de la même façon. En effet, dans le cas de deux têtes (x,y), si la rente est servie au survivant, quel qu'il soit, après le premier décès, la prime unique équivaut à la somme des primes uniques de deux assurances de rentes de survie simples reposant l'une sur la tête x, l'autre sur la tête y, soit :

$$r(a_{\frac{x}{y}} + a_{\frac{y}{x}}) = r(a_x + a_y - 2a_{xy}).$$

Il n'y a aucune difficulté pour passer des primes uniques de rentes de survie aux primes annuelles des mêmes combinaisons. La prime annuelle ne peut évidemment être payée que jusqu'au moment où l'assuré entre en jouissance des avantages stipulés au contrat. Ainsi la rente de survie ordinaire sur deux têtes x et y ne peut comporter le payement d'une prime annuelle ϖ qu'autant que les deux têtes vivent simultanément. Si elle est payable pendant toute la durée de vie simultanée, sa valeur est :

$$\varpi = r\frac{a_y - a_{xy}}{1 + a_{xy}}.$$

Le plus souvent, comme nous l'avons déjà fait remarquer, les rentes ne sont pas payables annuellement, mais semestriellement ou trimestriellement. Si R est la valeur de la rente, payable en k fois dans

l'année, à un groupe Γ après le décès du groupe G, la prime unique correspondante est :

$$R._{k}a_{\frac{G}{\Gamma}} = R\left({}_{k}a_{\Gamma} - {}_{k}a_{G,\Gamma}\right)$$

et, si l'on adopte la formule approchée habituelle

$${}_{k}a_{G} = a_{G} + \frac{k-1}{2k},$$

on voit que

$$R._{k}a_{\frac{G}{\Gamma}} = R\left(a_{\Gamma} - a_{G,\Gamma}\right) = Ra_{\frac{G}{\Gamma}}.$$

Le mode de payement de la rente n'intervient pas alors dans la valeur de la prime unique.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'entrée en jouissance de la rente de survie coïncidait avec le commencement de la période dans laquelle se produit le décès. Nous verrons ci-après (combinaisons diverses, page 163) quelles modifications il y a lieu d'introduire dans le calcul de la prime lorsque l'entrée en jouissance est fixée au jour même du décès. Au même chapitre, nous traiterons des rentes de survie temporaires (page 183).

Tables par âges à l'entrée. — Nous n'avons jusqu'à présent considéré que le cas où, dans le calcul des primes des diverses combinaisons en cas de vie, on utilisait des tables de mortalité indépendantes de l'âge à l'entrée. On peut se proposer d'étudier les modifications qui y seraient apportées par l'emploi de tables de mortalité par âges à l'entrée.

M. Poterin du Motel a traité cette question dans une thèse insérée dans le n° 14 du *Bulletin des*

Actuaires français, et à laquelle nous renvoyons nos lecteurs pour de plus amples détails.

Nous avons vu (page 38) que lorsqu'on se sert de tables de mortalité par âges à l'entrée, on peut considérer les primes versées annuellement comme une série de primes uniques successives et tenir compte ainsi de la sélection qui se produit parmi les assurés en cas de vie, du fait même du payement des primes. Si la prime annuelle constante destinée à l'assurance d'un capital différé de n années reposant sur une tête entrée en observation à l'âge x est ϖ, le versement de cette prime au début de la première année assurera un capital différé ayant pour valeur :

$$\frac{\varpi}{P^n_x}.$$

Le deuxième payement ϖ assurera un capital différé de $(n - 1)$ années égal à $\frac{\varpi}{P^{n-1}_{x+1}}$, la probabilité $\frac{v_{x+n}}{v_{x+1}}$ qui entre au dénominateur étant la probabilité de vie au bout de la $(n - 1)^e$ année d'une tête entrée à l'âge $(x + 1)$.

Si C est le capital assuré par le versement des n primes, sa valeur sera égale à :

$$C = \varpi\left[\frac{1}{P^n_x} + \frac{1}{P^{n-1}_{x+1}} + \dots + \frac{1}{P^1_{x+n-1}}\right].$$

ϖ est donné par la relation précédente.

Si la table est indépendante de l'âge à l'entrée, la relation se réduit naturellement à :

$$\varpi = C\frac{D_{x+n}}{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}} = C\frac{P^n_x}{1 + a^{(n-1)}_x}.$$

De même la prime ϖ versée chaque année par une personne s'étant assurée à l'âge x pour obtenir la jouissance d'une rente annuelle R à l'âge $(x+n)$, sera donnée par la relation :

$$\varpi\left(\frac{1}{\overset{n}{a}_x}+\frac{1}{\overset{n-1}{a}_{x+1}}+\cdots+\frac{1}{\overset{1}{a}_{x+n-1}}\right)=\mathrm{R}.$$

M. Poterin du Motel a montré que le calcul de l'annuité viagère à l'aide d'une table de mortalité indépendante de l'âge à l'entrée conduit à une erreur à l'avantage de l'assureur si la tête assurée est entrée dans l'assurance encore jeune, et à son détriment dans le cas où il s'agit d'un rentier viager entré, comme c'est le cas le plus fréquent, à un âge assez avancé. « Aussi, dit-il, les actuaires du Comité ont-ils adopté une majoration progressive à partir de 65 ans en multipliant l'annuité par un *coefficient de sélection* ε_x variable avec l'âge : $\varepsilon_x = (1,0018)^{(x-65)^2}$. »

H. — ASSURANCES EN CAS DE DÉCÈS

Vie entière à effet immédiat. — Nous avons calculé, au chapitre des Commutations, la prime d'une assurance vie entière, assurance d'un capital qui doit être payé au décès d'une tête x. Nous avons vu qu'en supposant le capital assuré égal à 1, et avec l'hypo-

thèse des décès en milieu d'année, la prime unique a pour valeur :

$$\Pi = \frac{(v_x - v_{x+1})(1+i)^{-x-\frac{1}{2}} + (v_{x+1} - v_{x+2})(1+i)^{-(x+1)-\frac{1}{2}} + \dots}{v_x(1+i)^{-x}}$$

$$= \frac{\Sigma C_x}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Si, pour effectuer ce calcul, on veut utiliser une table d'annuités viagères, on transformera cette expression de la façon suivante :

$$\Pi = \left[\frac{v_x - v_{x+1}}{v_x} + \frac{v_{x+1} - v_{x+2}}{v_x}(1+i)^{-1} + \dots\right](1+i)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{v_{x+1}}{v_x}(1+i)^{-1}i - \frac{v_{x+2}}{v_x}(1+i)^{-2}i + \dots\right]$$

$$= (1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - i\left[P_x^1 + P_x^2 + \dots\right]\right] = (1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x).$$

Avec l'hypothèse des décès au commencement de l'année, la formule s'écrirait simplement :

$$\Pi = 1 - ia_x \text{ [1]}$$

[1] Si l'on adoptait le taux de capitalisation instantané :

$$\iota = \log(1+i),$$

et l'annuité viagère continue α_x, l'expression de Π s'écrirait :

$$\Pi = -\int_0^\infty \frac{v'_{x+t}}{v_x}(1+i)^{-t}\,dt,$$

car la probabilité de vie de x au bout du temps t est :

$$-\frac{d\,v_{x+t}}{v_x} = -\frac{v'_{x+t}}{v_x}\,dt.$$

En intégrant par parties :

$$\Pi = -\left[\frac{v_{x+t}}{v_x}(1+i)^{-t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{v_{x+t}}{v_x}(1+i)^{-t}\log(1+\iota)\,dt$$

$$= 1 - \log(1+i)\int_0^\infty \frac{v_{x+t}}{v_x}(1+i)^{-t}\,dt = 1 - \iota\alpha_x.$$

et la démonstration en serait immédiate au moyen de la remarque suivante :

Si, à la valeur actuelle Π au taux i d'un capital égal à l'unité, remboursable au bout d'un certain temps, on ajoute la valeur actuelle des intérêts de ce capital servis périodiquement pendant ce temps : ia_x, on obtient évidemment la valeur 1 du capital prêté. C'est une remarque qui a déjà été faite plus haut (page 100) au chapitre des « Intérêts composés » et qui permet, dans le cas actuel, d'étendre la formule des assurances vie entière au cas d'un groupe quelconque G. En effet, le temps que l'on considère est tout à fait arbitraire. Il peut être pris égal à la durée de la vie d'un groupe absolument quelconque, et l'on aura ainsi pour prime unique de l'assurance vie entière d'un capital égal à l'unité reposant sur la vie du groupe G :

$$\Pi = 1 - ia_G,$$

si le groupe est supposé devoir disparaître au début d'une période, et

$$\Pi_1 = (1 + i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_G),$$

s'il disparaît, par hypothèse, au milieu d'une période.

Si les primes sont annuelles, elles peuvent être viagères ou temporaires. Elles sont données, suivant le cas, par les relations suivantes, relatives à l'assurance d'un capital C :

Prime viagère annuelle :

$$\varpi = C(1 + i)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - ia_G}{1 + a_G};$$

Prime annuelle temporaire de n années :

$$\varpi^{(n)} = C(1+i)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - ia_G}{1 + a_G^{(n-1)}}.$$

Si le groupe G se réduit à une seule tête d'âge x, ces primes deviennent respectivement :

$$\varpi = C(1+i)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - ia_x}{1 + a_x} = C \frac{M_x}{N_x};$$

$$\varpi^{(n)} = C(1+i)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - ia_x}{1 + a_x^{(n-1)}} = C \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}}.$$

Vie entière différée. — Une assurance vie entière est différée de n années quand le capital assuré n'est payable que si le décès a lieu postérieurement à la n^e année du contrat.

Soit Π_x^n la prime unique d'une assurance différée de n années reposant sur une tête d'âge x. Si, à l'expiration du différé, on voulait contracter sur la même tête, dont l'âge serait devenu $(x+n)$, une assurance équivalente à la précédente, il serait nécessaire de payer une prime unique que nous désignerons par Π_{x+n}, et qu'il sera facile de calculer. Mais cette prime Π_{x+n} ne pourra être payée qu'en cas de vie de l'assuré : c'est un capital différé de n années, et sa valeur actuelle est :

$$\Pi_{x+n} P_x^n.$$

Donc :

$$\Pi_x^n = \Pi_{x+n} P_x^n.$$

Cette remarque permet de calculer la prime unique différée d'une combinaison quelconque, connaissant la prime immédiate d'une assurance de même nature. Elle

s'applique d'ailleurs à un groupe quelconque, à la condition qu'il ne soit pas soumis à d'autres causes de modification et de disparition qu'aux lois de la mortalité et qu'il soit susceptible d'exister n années après l'époque actuelle.

Si on applique cette remarque au cas de l'assurance-vie entière différée de n années, on voit que la prime unique d'une telle combinaison reposant sur la vie d'une tête d'âge x pour un capital assuré C s'écrit :

$$\Pi_x^n = C\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = C\frac{M_{x+n}}{D_x},$$

formule déjà obtenue au chapitre des Commutations,

ou : $$\Pi_x^n = C(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_{x+n})P_x^n.$$

Assurance temporaire. — On déduit de là la valeur de la prime unique d'une assurance temporaire en cas de décès. Le capital assuré n'est alors payable que si la mort de l'assuré survient pendant les n premières années du contrat. La prime unique $\Pi_x^{(n)}$ est évidemment égale à :

$$\Pi_x^{(n)} = \Pi_x - \Pi_x^n = C\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

$$= C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - ia_x - (1 - ia_{x+n})P_x^n\right],$$

$$= C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - P_x^n - ia_x^{(n)}\right].$$

Cette formule s'applique à un état de choses quelconque.

Si le contrat est souscrit à primes annuelles, le

nombre de ces dernières ne peut être supérieur à *n*. Sous cette forme, cette combinaison est d'un usage assez fréquent dans le commerce. Un négociant ou un industriel n'est pas toujours, au début de sa carrière, en possession d'une mise de fonds suffisante pour donner rapidement à ses opérations toute l'extension désirable. Il est donc amené à contracter un emprunt qu'il remboursera plus tard, lorsque les bénéfices de son exploitation le lui permettront. On comprend tout l'intérêt que peut avoir le prêteur à contracter à son profit, sur la tête du débiteur, une assurance temporaire en cas de décès, qui lui permettra de rentrer dans ses avances en cas de mort prématurée de ce dernier. Cette garantie devient une des conditions du prêt, et l'emprunteur s'engage à payer les primes de cette assurance.

J. — COMBINAISONS DIVERSES

Méthodes de calcul des primes. — Une combinaison quelconque d'assurance sur la vie se ramène à la juxtaposition d'une assurance en cas de vie et d'une assurance en cas de décès. Les deux assurances reposent, ou bien sur la même tête, comme dans les contrats mixtes, ou sur deux ou plusieurs têtes différentes, comme il arrive pour les dotales.

1° En analysant les conditions du contrat, on arrive en général assez aisément à calculer la fraction de prime destinée à l'assurance en cas de vie et celle qui

est destinée à l'assurance au décès. La première se ramène à la prime d'un capital différé ou d'une rente viagère, la seconde à celle d'une assurance vie entière ou temporaire en cas de décès. Cette décomposition étant ainsi faite, les formules établies précédemment résoudront la question.

2° Il peut être difficile de décomposer le contrat proposé ainsi qu'il vient d'être dit. Pour en obtenir la prime unique, il sera nécessaire alors de calculer la valeur actuelle, au moment de la souscription, des engagements de l'assureur. C'est ainsi que nous avons calculé la valeur de l'annuité viagère.

3° Nous avons vu qu'il était avantageux, pour les combinaisons usuelles sur une seule tête, de construire des tables de commutations qui conduisent, au moyen de calculs très simples et très rapides, à la connaissance des primes de ces combinaisons. Les tables de commutation établies par le Comité des Compagnies françaises d'assurances sur la vie sont, comme on l'a vu, au nombre de six; mais rien n'empêche d'en imaginer d'autres, par exemple des tables sur plusieurs têtes, et c'est ce que l'on a fait pour quelques combinaisons qui ont pris un assez grand développement, comme les dotales avec contre-assurance.

Il est cependant inutile de multiplier indéfiniment les tables et de compliquer leur usage. Les contrats reposant sur la vie d'un groupe de personnes sont assez rares et ne justifient pas le travail énorme occasionné par la construction de tables nouvelles.

4° Nous avons montré (page 155) comment on calcule la prime unique d'une assurance différée Π_x^n en

partant de la prime de la même assurance, à effet immédiat, contractée à l'âge $(x+n)$:

$$\Pi_x^n = \Pi_{x+n} P_x^n .$$

Cette formule est applicable à un groupe dans les conditions précédemment indiquées. Elle peut être utilisée au calcul par récurrence des primes uniques de contrats analogues souscrits à des âges différents. En effet, quand les assurés sont très âgés, les sommations à faire pour calculer la valeur actuelle des engagements de l'assureur sont peu étendues, et les résultats s'obtiennent facilement. Or, si la prime est calculée à un âge donné, on pourra en déduire rapidement la prime qui correspond à un âge d'une unité inférieure. Si Π_G est la prime à l'âge G du groupe, cette prime devra couvrir le risque pendant la première année $(\Pi_G^{(1)})$, puis le même risque pendant les années suivantes (assurance différée d'un an) :

$$\Pi_G = \Pi_G^{(1)} + \Pi_{G+1} P_G^1 .$$

Nous allons, en passant en revue les principales combinaisons usuelles, donner des exemples d'application de ces diverses méthodes.

Assurance d'un capital de survie. Calcul de la prime unique. — Le capital est payable au décès d'une tête d'âge actuel x à la condition qu'une tête d'âge actuel y lui survive. Cette combinaison peut être considérée comme une assurance au décès par rapport à la tête x, comme une assurance en cas de

vie par rapport à la tête y. La tête x devra donc être soumise à un examen médical.

Supposons le capital de survie égal à l'unité, et cherchons quelle est sa valeur actuelle.

Il faut d'abord calculer l'expression de la probabilité que la tête x meure pendant le cours de la n^e année et que la tête y lui survive. Cet événement pourra se réaliser de deux façons :

1° x mourra pendant le cours de la n^e année, et y sera vivante à la fin de cette même année; la probabilité de réalisation de cette hypothèse est :

$$\overset{n}{p}_y\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right).$$

2° x et y mourront pendant le cours de la n^e année; probabilité :

$$\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_y\right)\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right);$$

mais y pourra mourir alors après x ou avant x. Si les deux têtes suivent exactement la même loi de mortalité, il y a autant de chances pour que les décès se produisent dans l'ordre (x, y) que dans l'ordre (y, x). La probabilité pour que x et y meurent toutes deux dans le courant de la n^e année, mais dans l'ordre (x, y), est donc :

$$\frac{1}{2}\left(\overset{n-1}{p}_y - \overset{n}{p}_y\right)\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right).$$

La probabilité totale cherchée est :

$$\overset{n}{p}_y\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right) + \frac{1}{2}\left(\overset{n-1}{p}_y - \overset{n}{p}_y\right)\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right)$$
$$= \frac{\left(\overset{n-1}{p}_x - \overset{n}{p}_x\right)\left(\overset{n-1}{p}_y + \overset{n}{p}_y\right)}{2},$$

et la valeur actuelle du capital I payable, dans cette hypothèse, au décès de x est égale à :

$$\frac{1}{2}\left(p_x^{n-1}-p_x^n\right)\left(p_y^{n-1}+p_y^n\right)(1+i)^{-n+\frac{1}{2}},$$

en admettant toutefois que la tête x meure au milieu de l'année, ce qui ne change en rien l'expression de la probabilité précédente. En effet, la tête y n'étant assujettie à aucune condition peut, si elle décède dans le cours de la n^e année, mourir aussi bien dans le premier semestre que dans le second : sa probabilité de mourir après x dans le cas où x meurt au milieu de la n^e année est bien $1/2$.

La valeur actuelle $\Pi_{\frac{x}{y}}$ du capital de survie considéré, payable à y au décès de x, quelle que soit l'année pendant laquelle se produit ce décès, s'obtient en faisant la somme d'expressions annalogues à la précédente, dans lesquelles n prend, à partir de l'unité, toutes les valeurs possibles :

$$\Pi_{\frac{x}{y}}=\frac{1}{2}\sum_1^\infty\left(p_x^{n-1}-p_x^n\right)\left(p_y^{n-1}+p_y^n\right)(1+i)^{-n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[\sum_1^\infty p_{xy}^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}+\sum_1^\infty p_x^{n-1}p_y^n(1+i)^{-(n-1)}\right.$$

$$\left.-\sum_1^\infty p_x^n p_y^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}-\sum_1^\infty p_{xy}^n(1+i)^{-(n-1)}\right].$$

Or : $\sum_1^\infty p_{xy}^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}=1+P_{xy}^1+P_{xy}^2+\ldots=1+a_{xy}$,

$$\sum_1^\infty p_{xy}^n(1+i)^{-(n-1)}=(1+i)\left[P_{xy}^1+\ldots\right]=(1+i)a_{xy},$$

$$\sum_1^\infty p_x^{n-1} p_y^n (1+i)^{-(n-1)} = p_y \sum_1^\infty p_{x,y+1}^{n-1} (1+i)^{-(n-1)}$$
$$= p_y(1 + a_{x,y+1}),$$
$$\sum_1^\infty p_x^n p_y^{n-1} (1+i)^{-(n-1)} = p_x \sum_1^\infty p_{x+1,y}^{n-1} (1+i)^{-(n-1)}$$
$$= p_x(1 + a_{x+1,y}).$$

Donc :

$$\Pi_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\Big[1 - ia_{xy} + p_y(1 + a_{x,y+1})$$
$$- p_x(1 + a_{x+1,y})\Big] \qquad (1)$$

On pourrait aussi, en tenant compte des relations :

$$p_x^{n-1}\ p_y^n(1+i)^{-(n-1)} = \frac{p_{x-1,y}^n}{p_{x-1}}(1+i)^{-(n-1)} = \frac{P_{x-1,y}^n}{P_{x-1}^1}$$

$$p_x^n\ p_y^{n-1}(1+i)^{-(n-1)} = \frac{p_{x,y-1}^n}{p_{y-1}}(1+i)^{-(n-1)} = \frac{P_{x,y-1}^n}{P_{y-1}^1}.$$

écrire Π sous la forme suivante :

$$\Pi_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - ia_{xy} + \frac{a_{x-1,y}}{P_{x-1}^1} - \frac{a_{x,y-1}}{P_{y-1}^1}\right] \quad (1)'$$

En partant de ces formules, on retrouve l'expression de la prime d'assurance vie entière, en supposant que la tête y puisse ne mourir jamais.

Alors : $a_{xy} = a_x$.

$$p_y(1 + a_{x,y+1}) = 1 + a_x,$$
$$p_x(1 + a_{x+1,y}) = p_x(1 + a_{x+1}),$$

$$p_x(1+a_{x+1}) = P_x^1(1+i)(1+a_{x+1}) = (1+i)\,a_x;$$

car on sait que : $a_x = P_x^1(1+a_{x+1})$

(formule de récurrence déjà obtenue), et l'expression (1) donne :

$$\Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}}(1-ia_x).$$

Applications. — 1° *Rente de survie dont la première période commence au décès même.* — Les formules données précédemment pour les rentes de survie supposent que l'entrée en jouissance de la rente coïncide avec le commencement de la période pendant laquelle meurt la tête assurée. On peut stipuler que l'entrée en jouissance coïncidera avec le décès même, et que, par conséquent, le premier terme de la rente sera payé exactement à la fin de la période qui commence au décès. Il faut donc ajouter aux formules trouvées un terme correctif que l'on calcule approximativement de la façon suivante :

On suppose, comme nous l'avons fait en général, que les décès se produisent au milieu des périodes ; la rente, telle qu'elle est calculée au moyen des relations ordinaires, est anticipée d'une demi-période, et il suffit de retrancher à l'expression de la prime unique la valeur d'un capital de survie égal au demi-terme de la rente payable au décès de l'assuré. On obtient ainsi, en désignant par R le terme annuel de la rente :

$$R.{}_k a_{\frac{x}{y}} = R(a_y - a_{xy}) - \frac{R}{2k}\,\Pi_{\frac{x}{y}}.$$

2° *Prime unique d'un capital payable au décès de la*

tête x *à la condition qu'elle ait survécu à une autre tête* y. — Si on ajoute à cette prime unique celle d'un capital de survie payable à y au décès de x, on obtient évidemment la valeur de la prime unique Π_x d'un capital payable au décès de x, à quelque époque qu'il survienne. La prime cherchée est donc :

$$\Pi_x - \Pi_{\frac{x}{y}}.$$

Prime annuelle de l'assurance d'un capital de survie. — Elle est payable au plus pendant toute la durée de vie simultanée des deux têtes x et y, et elle est égale dans cette hypothèse à :

$$\varpi_{\frac{x}{y}} = \frac{C\Pi_{\frac{x}{y}}}{1 + a_{xy}};$$

si C est le capital assuré.

Extension. — Supposons que la période, ou unité de temps, devienne infiniment petite, comme nous l'avons fait quand nous avons considéré l'annuité viagère continue. La probabilité que la tête x mourra au bout du temps t, la tête y lui survivant, est la probabilité composée :

$$-\frac{dv_{x+t}}{v_{x+t}} \frac{v_{x+t}}{v_x} \cdot \frac{v_{y+t}}{v_y} = -\frac{v'_{x+t}}{v_x} \cdot \frac{v_{y+t}}{v_y} dt,$$

et la valeur actuelle de 1 franc, payable dans ces hypothèses, est :

$$-\frac{v'_{x+t}}{v_x} \cdot \frac{v_{y+t}}{v_y} (1+i)^{-t} dt.$$

Donc :

$$\Pi_{\frac{x}{y}} = -\int_0^\infty \frac{v'_{x+t}}{v_x} \cdot \frac{v_{y+t}}{v_y}(1+i)^{-t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{v_x v_y} \frac{d}{dx}\left[\int_0^\infty v_{x+t} v_{y+t}(1+i)^{-t}\,dt\right].$$

Or : $\int_0^\infty \frac{v_{x+t}}{v_x} \frac{v_{y+t}}{v_y}(1+i)^{-t}\,dt = \int_0^\infty \mathrm{P}^t_{xy}\,dt = \alpha_{xy}$,

α_{xy} étant l'annuité viagère continue sur deux têtes, et on obtient :

$$\Pi_{\frac{x}{y}} = -\frac{1}{v_x v_y} \frac{d(v_x v_y \alpha_{xy})}{dx} = -\frac{1}{v_x} \frac{d(v_x \alpha_{xy})}{dx}.$$

Assurance dotale. — Comme son nom l'indique, cette assurance est destinée à constituer une dot sur la tête d'un enfant. Soit x l'âge actuel de l'enfant. La dot C lui sera payée s'il atteint un certain âge $(x+n)$, fixé au moment de la signature du contrat. Mais le père (ou le contractant) ne s'engage à payer les primes successives qu'autant qu'il vivra lui-même. L'assurance dotale est donc l'assurance d'un capital différé dont les primes ne sont payables, pendant la durée du différé, qu'en cas de vie simultanée du contractant et de l'assuré. La prime, supposée annuelle, est égale à

$$\varpi = \frac{\mathrm{CP}^n_x}{1 + a^{(n-1)}_{xy}}.$$

Cette combinaison nécessite un examen médical du

contractant; c'est, en effet, une assurance au décès par rapport à celui-ci.

Si l'on se sert de tables par âges à l'entrée, on calcule la prime annuelle comme on l'a indiqué précédemment, en considérant les primes annuelles successives comme des primes uniques versées aux âges : (x, y), $(x+1, y+1)$, etc.

Assurance mixte sur une seule tête. — Le capital assuré C est versé aux ayants droit au décès de l'assuré, si ce décès survient pendant la durée du contrat; sinon, il est versé à l'assuré lui-même à l'échéance. Cette combinaison est la juxtaposition d'une assurance temporaire en cas de décès et d'un capital différé. La prime unique s'obtient immédiatement. C'est, avec les commutations :

$$\Pi = C\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

et, à l'aide des annuités viagères :

$$\Pi = C\left[(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - P_x^n - ia_x^{(n)}\right) + P_x^n\right].$$

Les primes annuelles constantes, payables pendant toute la durée du contrat, sont égales à :

$$\varpi = C\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = C\frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - P_x^n - ia_x^{(n)}\right) + P_x^n}{1 + a_x^{(n-1)}}.$$

Cette combinaison est une des plus fréquentes. L'assuré a la perspective de jouir de son capital, s'il vit assez longtemps, et il ne laissera pas les siens dans le besoin si son décès est prématuré.

La durée de la mixte est généralement de 20 ou 25 ans. L'examen médical s'impose, à cause de la part prépondérante que joue l'assurance temporaire en cas de décès dans cette combinaison. Les Compagnies françaises acceptent les proposants jusqu'à l'âge de 45 ans pour une durée de 30 ans, et jusqu'à l'âge de 60 ans pour une durée de 15 ans. Les assurés en vie entière sont d'ailleurs admis eux aussi jusqu'à cet âge de 60 ans.

Assurance mixte sur plusieurs têtes. — La combinaison la plus usitée est l'assurance mixte sur deux têtes, le capital étant payable au premier décès, si ce décès survient avant le terme du contrat, ou à ce terme même, si les deux assurés survivent à l'expiration de la police. La prime unique s'écrit:

$$\Pi = C\left[(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - P^n_{xy} - ia^{(n)}_{xy}\right) + P^n_{xy}\right].$$

La prime de l'assurance mixte sur deux têtes, capital payable au dernier décès, s'exprime au moyen d'une formule analogue, le groupe xy étant remplacé par le groupe $\overline{xy}$ s'éteignant au dernier décès. La prime est naturellement moins élevée que lorsqu'il s'agit d'une assurance à capital payable au premier décès, toutes choses égales d'ailleurs.

Assurance mixte à capital doublé. — Le capital est payable, comme dans le cas de la mixte ordinaire, soit au décès de l'assuré, si ce décès survient avant le terme du contrat, soit au terme du contrat, si l'assuré survit. Dans ce dernier cas, l'as-

suré obtient en outre une nouvelle police d'assurance pour la vie entière, complètement libérée[1], et d'un capital égal à celui de la police primitive. La prime unique de cette combinaison, d'ailleurs peu usitée, résulte des explications qui précèdent et qui montrent qu'elle se ramène à une assurance sur la vie entière à laquelle se juxtapose l'assurance d'un capital différé :

$$\Pi = C \frac{M_x + D_{x+n}}{D_x} = C \left[(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x) + P^n_x\right]$$

$$\varpi = C \frac{M_x + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = C \frac{\left[(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x) + P^n_x\right]}{1 + a^{(n-1)}_x}.$$

Assurance à terme fixe. — Le capital assuré est payable au terme fixé, quoi qu'il arrive, que l'assuré soit mort ou vivant à l'échéance. La prime unique est donc simplement la valeur actuelle du capital C payable dans n années, soit : $C(1+i)^{-n}$. Mais s'il s'agit de primes payables annuellement, elles ne peuvent être acquittées qu'autant que l'assuré est vivant, ce qui donne pour expression de la prime annuelle, supposée payable pendant toute la durée de l'assurance :

$$\varpi = C \frac{(1+i)^{-n}}{1 + a^{(n-1)}_x}.$$

La combinaison est alors une assurance au décès, et la visite médicale de l'assuré est nécessaire.

Terme fixe à capital doublé. — C'est une

[1] C'est-à-dire pour laquelle il n'y a plus à payer de primes.

assurance à terme fixe telle que, si l'assuré vit au terme du contrat, il obtient une police, libérée de primes, d'assurance vie entière pour le même capital, en plus du capital lui-même. C'est donc une assurance terme fixe, plus une assurance vie entière différée. La prime unique est égale à :

$$\Pi = C\left[(1+i)^{-n} + \frac{M_{x+n}}{D_x}\right]$$

$$= C\left[(1+i)^{-n} + (1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - ia_{x+n}\right) P_x^n\right].$$

Assurance combinée. — L'assurance combinée garantit le payement d'un capital C au décès de l'assuré si ce décès se produit avant une date fixée, terme du contrat. Si l'assuré vit au terme du contrat, il peut opter entre les trois combinaisons suivantes :

1° Rester assuré, sans payer de prime, pour le même capital en vie entière et toucher une rente viagère égale à la prime annuelle ϖ de la combinaison. La valeur de cette prime ϖ est donnée par l'équation du premier degré suivante :

$$\varpi\left(1 + a_x^{(n-1)}\right) = C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - ia_x\right) + \varpi a_x^n.$$

ou $$\varpi(N_x - N_{x+n}) = CM_x + \varpi N_{x+n+1}$$

2° Rester assuré en vie entière pour le même capital et recevoir immédiatement un autre capital : ϖa_{x+n}, qui est la valeur, au terme du contrat, de la rente viagère ϖ.

3° Résilier son contrat et toucher un capital égal à ϖa_{x+n} augmenté de la réserve du contrat vie entière.

Dans certaines combinées spéciales, la rente différée n'est qu'une fraction $\frac{p}{q}$ de la prime annuelle ϖ_1 du contrat. Cette dernière est alors moins élevée :

$$\varpi_1\left(1+a_x^{(n-1)}\right)=C(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1-ia_x)+\frac{p}{q}\varpi_1 a_x^n.$$

Assurance d'annuités. — L'assureur s'engage à payer des annuités A à partir du décès de l'assuré jusqu'à une époque déterminée. Si l'assuré, d'âge actuel x, vit encore à cette époque, les engagements de l'assureur se trouvent par là même annulés.

La prime unique est la différence entre la valeur actuelle d'une annuité certaine temporaire de n années et la valeur actuelle d'une annuité viagère payable du vivant de la tête x et pendant n années au maximum, soit

$$A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-a_x^{(n)}\right].$$

Si cette combinaison est souscrite à primes annuelles, l'assureur ne doit pas consentir une prime constante; car, le nombre des annuités à payer décroissant d'année en année, le capital assuré décroît, et si la prime était constante, il viendrait un moment où l'assuré aurait avantage à abandonner sa police pour en souscrire une nouvelle à prime moins élevée et garantissant néanmoins le payement du même nombre d'annuités. La prime devra donc être décroissante; on pourra stipuler, par exemple, qu'elle devra décroître en progression arithmétique.

On peut remarquer que, si l'on ajoute à la prime unique d'un contrat terme fixe de capital C :

$$C(1+i)^{-n},$$

la prime unique d'une assurance d'annuités égales à Ci :

$$Ci\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}-a_x^{(n)}\right],$$

on obtient :

$$C\left(1-ia_x^{(n)}\right),$$

c'est-à-dire la prime unique d'une assurance mixte lorsque les décès sont supposés se produire au début de l'année. Cela résulte de l'extension aux placements viagers de la remarque faite à la page 100, à propos des annuités certaines, et qui s'énonce ainsi : la différence entre les valeurs actuelles d'un même capital payable à deux époques différentes est égale à la valeur actuelle des intérêts de ce même capital servis périodiquement dans l'intervalle.

Assurances en cas de décès en progression arithmétique. — Nous aurons à considérer, à propos des combinaisons avec contre-assurances, des assurances au décès à capitaux croissant en progression arithmétique. Supposons que les capitaux assurés successifs soient : C la première année, $(C+p)$ la deuxième, $(C+2p)$ la troisième, etc. Désignons par Π la prime unique de la combinaison étudiée, par Π_1 et Π_2 celles de deux combinaisons analogues, de même durée, portant, la première sur un capital constant et égal à 1, la deuxième sur un capital égal à 1 la première année, à 2 la deuxième, etc. On aura évidemment :

$$\Pi=(C-p)\,\Pi_1+p\,\Pi_2.$$

Ainsi, s'il s'agit d'une assurance-vie entière en progression arithmétique, on aura, en conservant les notations ci-dessus :

$$\Pi = (C - p)(1 + i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x) + p\Pi_2.$$

Calculons Π_2. Nous avons vu, au chapitre des Commutations, que :

$$\Pi_2 = \frac{R_x}{D_x}.$$

Un raisonnement identique à celui qui nous a conduit à cette expression nous donnera, au moyen des annuités viagères :

$$\Pi_2 = (1 + i)^{-\frac{1}{2}}[1 - ia_x + (1 - ia_{x+1})P_x^1 + \ldots]$$
$$= (1 + i)^{-\frac{1}{2}}(1 + a_x - iA_x).$$

La prime Π'_2 d'une assurance temporaire de même nature a pour valeur, au moyen des commutations :

$$\Pi'_2 = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.$$

On trouvera aussi aisément l'expression suivante de Π'_2 :

$$\Pi'_2 = (1 + i)^{-\frac{1}{2}}\Big[(1 + a_x - iA_x)$$
$$- \big((1 + a_{x+n} - iA_{x+n}) + n(1 - ia_{x+n})\big)P_x^n\Big]$$
$$= (1 + i)^{-\frac{1}{2}}\Big[1 - (n + 1)P_x^{(n)} + a_x^{(n)} - iA_x^{(n)}\Big],$$

car on a la relation :

$$A_x - A_x^n - na_x^n = A_x^{(n)}.$$

Les assurances à capital croissant en progression arithmétique peuvent être contractées à primes annuelles constantes; mais il ne saurait en être de même lorsque le capital assuré décroît suivant une loi analogue. On se souvient, en effet (voir page 138), que, dans tous les cas où le risque décroît, il pourrait arriver, si la prime annuelle était constante, que l'assuré trouve son avantage à résilier sa police primitive pour en souscrire une nouvelle équivalente, la prime de cette dernière étant moins élevée. Or il est inadmissible que les engagements de l'assuré puissent varier sans que changent ceux de l'assureur. C'est pourquoi il faudra stipuler une prime décroissante comme le risque. La prime pourra, par exemple, décroître en progression arithmétique.

On pourra aussi considérer l'assurance comme une série d'assurances temporaires au capital égal à la raison de la progression et souscrites : la première pour un an, la seconde pour deux ans, etc. La prime sera ainsi variable et correspondra exactement au risque assuré.

Contre-assurances. — *Problème général.* — Quand on souscrit une assurance en cas de vie, une dotale par exemple, on peut être désireux de ne pas perdre les primes versées, en cas de mort de l'assuré avant le terme du contrat. On contre-assure alors ces primes au moyen du versement d'une prime spéciale qui vient s'ajouter à celle de la police primitive. Si cette dernière est une prime unique, la prime de contre-assurance sera celle de l'assurance en cas de décès d'un capital égal à cette prime unique. La contre-

assurance de primes annuelles revient à une assurance en cas de décès à capital croissant en progression arithmétique.

Le plus souvent, la contre-assurance n'embrasse pas seulement les primes versées pour l'assurance proprement dite, mais les primes totales de la combinaison adoptée. Si, par exemple, la prime unique versée au début de l'assurance est Π_x, le bénéficiaire touchera le capital assuré C si l'assuré d'âge x vit à l'échéance; sinon le contractant touchera, au décès de l'assuré, le montant Π_x de la prime unique sans intérêts. En écrivant que les engagements des deux parties contractantes sont équivalentes, on obtiendra la relation suivante, du premier degré en Π_x :

$$\Pi_x = C\Pi_x^n + \Pi_x \Pi_x^{(n)} \qquad (1)$$

en désignant par Π_x^n et $\Pi_x^{(n)}$ les primes uniques de l'assurance différée sans contre-assurance et de l'assurance au décès temporaire de n années d'un capital égal à l'unité : $\Pi_x = \frac{C\Pi_x^n}{1 - \Pi_x^{(n)}}$.

Si les primes de la combinaison adoptée sont annuelles et égales à ϖ_x, une relation analogue à la précédente :

$$\varpi_x = C\varpi_x^n + \varpi_x \varpi_x^{(n)} \qquad (2)$$

$$\varpi_x = \frac{C\varpi_x^n}{1 - \varpi_x^{(n)}}$$

donnera l'expression de ϖ_x en fonction des primes

annuelles ϖ_x^n et $\varpi_x^{(n)}$ de l'assurance simple considérée, au capital égal à l'unité, et de l'assurance au décès temporaire en progression arithmétique des capitaux successifs 1, 2, ... n.

Ainsi, la prime unique d'un capital C différé de n années et souscrit avec contre-assurance sur une tête d'âge x est :

$$\Pi = \frac{CP_x^n}{1-(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1-P_x^n-ia_x^{(n)}\right)} = \frac{CD_{x+n}}{D_x-M_x+M_{x+n}}.$$

Si le contrat envisagé comporte le payement d'une prime annuelle constante ϖ, cette prime est donnée par la relation :

$$\varpi = \frac{CP_x^n}{1+a_x^{(n-1)}-(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1-(n+1)\,P_x^n+a_x^{(n)}-iA_x^{(n)}\right]}$$

$$= \frac{CD_{x+n}}{N_x-N_{x+n}-R_x+R_{x+n}+nM_{x+n}}.$$

Assurance d'un capital de survie avec contre-assurance. — Nous avons vu que la prime unique assurant à une tête d'âge y le payement d'un capital C au décès d'une autre tête d'âge x était donnée par la relation :

$$\Pi = C\Pi_{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}[1-ia_{xy}+p_y(1+a_{x,y+1})$$

$$-p_x(1+a_{x+1,y})]C,$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - ia_{xy} + \frac{a_{x-1,y}}{P^1_{x-1}} - \frac{a_{x,y-1}}{P^1_{y-1}}\right]C.$$

Si la tête y meurt avant la tête x, le bénéficiaire disparaissant, l'assureur n'a plus à verser aucun capital. Mais si le contractant a contre-assuré la prime Π, cette prime lui sera remboursée en cas de prédécès du bénéficiaire. La prime unique de cette contre-assurance n'est autre que la prime unique de l'assurance de survie du capital Π payable à x si y meurt avant lui, soit :

$$\Pi_{\frac{y}{x}}\Pi = \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}[1 - ia_{xy} + p_x(1 + a_{x+1,y}) \\ - p_y(1 + a_{x,y+1})]\Pi.$$

Si la prime totale est contre-assurée, cette prime est donnée par la relation :

$$\Pi_1 = C\Pi_{\frac{x}{y}} + \Pi_1\Pi_{\frac{y}{x}}.$$

Enfin si l'assurance du capital de survie comporte le payement de primes annuelles, leur valeur est :

$$\varpi = C\varpi_{\frac{x}{y}} + \varpi\,\varpi'_{\frac{y}{x}}.$$

$\varpi'_{\frac{y}{x}}$ étant la prime annuelle de l'assurance de survie à capital croissant en progression arithmétique de raison 1 et commençant par l'unité. Cherchons l'expression de cette prime $\varpi'_{\frac{y}{x}}$. Le capital dû en cas de décès

de y pendant la n^e année, si x lui survit, est n, et sa valeur actuelle est égale à :

$$\frac{1}{2} n(1+i)^{-n+\frac{1}{2}}\left(p_y^{n-1} - p_y^n\right)\left(p_x^{n-1} + p_x^n\right).$$

La valeur de la prime unique $\Pi'_{\frac{y}{x}}$ est donc :

$$\Pi'_{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}\sum_1^\infty n(1+i)^{-n+\frac{1}{2}}\left(p_y^{n-1} - p_y^n\right)\left(p_x^{n-1} + p_x^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\Big[\sum_1^\infty np_{xy}^{n-1}(1+i)^{-(n-1)} + \sum_1^\infty p_y^{n-1} p_x^n n(1+i)^{-(n-1)}$$

$$- \sum_1^\infty p_y^n p_x^{n-1} n(1+i)^{-(n-1)} - \sum_1^\infty p_{xy}^n n(1+i)^{-(n-1)}\Big].$$

Or : $\sum_1^\infty np_{xy}^{n-1}(1+i)^{-(n-1)} = 1 + 2\,\mathrm{P}_{xy}^1 + 3\mathrm{P}_{xy}^2 + \cdots$

$$= 1 + a_{xy} + \mathrm{A}_{xy},$$

$$\sum_1^\infty np_y^{n-1} p_x^n (1+i)^{-(n-1)} = p_x\left[1 + 2\,\mathrm{P}_{x+1,y}^1 + \cdots\right]$$

$$= p_x[1 + a_{x+1,y} + \mathrm{A}_{x+1,y}],$$

$$\sum_1^\infty np_y^n p_x^{n-1}(1+i)^{-(n-1)} = p_y\left[1 + 2\,\mathrm{P}_{x,y+1}^1 + \cdots\right]$$

$$= p_y[1 + a_{x,y+1} + \mathrm{A}_{x,y+1}].$$

$$\sum_1^\infty np_{xy}^n (1+i)^{-(n-1)} = (1+i)\left[\mathrm{P}_{xy}^1 + 2\mathrm{P}_{xy}^2 + \cdots\right]$$

$$= (1+i)\mathrm{A}_{x,y}.$$

$$\Pi'_{\frac{y}{x}} = [1 + a_{xy} - i\mathrm{A}_{xy} + p_x(1 + a_{x+1,y} + \mathrm{A}_{x+1,y})$$

$$- p_y(1 + a_{x,y+1} + \mathrm{A}_{x,y+1})]\frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}.$$

On peut écrire aussi cette expression sous la forme :

$$\Pi'_{\frac{y}{x}} = \frac{1}{2}(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[1 + a_{xy} - iA_{xy} + \frac{A_{x,y-1}}{P^1_{y-1}} - \frac{A_{x-1,y}}{P^1_{x-1}}\right],$$

et la prime annuelle correspondante est :

$$\varpi'_{\frac{y}{x}} = \frac{\Pi'_{\frac{y}{x}}}{1 + a_{xy}}.$$

Rentes de survie ou rentes différées avec contre-assurance. — On peut contre-assurer aussi les primes destinées à assurer une rente de survie ou une rente différée. Par exemple, la prime unique d'une rente de survie avec contre-assurance est :

$$\Pi = \frac{C(a_y - a_{xy})}{1 - \Pi_{\frac{y}{x}}}.$$

Le problème de la contre-assurance se résout donc en général par l'application de formules analogues aux relations (1) et (2).

Assurance dotale avec contre-assurance. — Cependant une combinaison fréquemment employée : l'assurance dotale avec contre-assurance nécessite une analyse spéciale lorsque le contrat comporte le payement d'une prime annuelle, comme c'est le cas général.

Soit ϖ cette prime et soient x et y les âges de l'assuré et du contractant. La prime ϖ cesse d'être due soit au décès du contractant, soit au décès de l'assuré. D'autre part, si l'assuré meurt avant le terme du

contrat, l'assureur rembourse intégralement les primes qui ont été versées.

Plaçons-nous à l'époque de la conclusion du contrat. La première prime ϖ vient d'être payée. Si l'assuré meurt pendant le cours de la première année, l'assureur rembourse cette prime, qui constitue ainsi un capital payable en cas de décès de l'assuré dans l'année. La valeur actuelle de ce capital, au moment du payement de la première prime, est:

$$\varpi \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x}.$$

Si le contractant vit au début de la deuxième année, il verse une deuxième prime ϖ, et la somme payable en cas de décès de l'assuré pendant cette deuxième année est 2ϖ (assurance temporaire d'un an en cas de décès, différée d'une année). La valeur actuelle de cette somme est:

$$2\varpi p_y \frac{M_{x+1} - M_{x+2}}{D_{x+1}} \times \frac{D_{x+1}}{D_x} = 2\varpi p_y \frac{M_{x+1} - M_{x+2}}{D_x}.$$

De même si les deux têtes vivent au début de la k^e année, le contractant verse la k^e prime, et la somme remboursée en cas de décès de l'assuré pendant cette k^e année est $k\varpi$. La valeur actuelle de cette somme est:

$$k\varpi p_y^{k-1} \frac{M_{x+k-1} - M_{x+k}}{D_x}.$$

Enfin si l'assuré vit au terme du contrat, le capital assuré C lui est versé, et sa valeur actuelle est CP_x^n.

La valeur des engagements de l'assureur au moment de la signature du contrat s'écrit:

$$\sum_{k=1}^{k=n} k\varpi p_y^{k-1} \frac{M_{x+k-1} - M_{x+k}}{D_x} + CP_x^n$$

et la valeur des engagements de l'assuré est:

$$\varpi\left(1 + a_{xy}^{(n-1)}\right).$$

Ces deux expressions sont égales:

$$\varpi\left(1 + a_{xy}^{(n-1)}\right) = \frac{\varpi}{D_x} \sum_1^n kp_y^{k-1}\left(M_{x+k-1} - M_{x+k}\right) + C\,\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\varpi = \frac{CD_{x+n}}{\left(1 + a_{xy}^{(n-1)}\right) D_x - \sum_1^n kp_y^{k-1}\left(M_{x+k-1} - M_{x+k}\right)}.$$

On peut construire des tables de quantités telles que

$$\left[kp_y^{k-1}\left(M_{x+k-1} - M_{x+k}\right)\right]$$

et des tables de sommes de ces nombres. Ce sont de nouvelles tables de commutations relatives à la combinaison considérée.

Usufruits et nues propriétés. — Les Compagnies d'assurances font assez fréquemment des achats de nues propriétés. Ces achats supposent le calcul préalable de la valeur de ces nues propriétés, et souvent aussi nécessitent la connaissance de la valeur des usufruits correspondants.

L'usufruitier jouit des revenus d'un capital, sa vie durant; *le nu propriétaire* aura droit à la pleine jouissance de ce capital au décès de l'usufruitier. La réunion de

l'usufruit et de la nue propriété constitue la *toute propriété*.

D'après ces définitions, on voit que l'usufruit est assimilable à une rente viagère, et la nue propriété à une assurance au décès. Si le revenu du capital considéré est connu et constant, si la valeur de la toute propriété de ce capital est invariable, l'usufruit et la nue propriété se calculent aisément.

Mais il n'en est jamais ainsi. S'il s'agit de capitaux immobiliers, une foule de facteurs interviennent pour en faire varier la valeur. Si, au contraire, il s'agit de valeurs mobilières, leur cours varie, leur revenu n'est pas toujours fixe (actions), et enfin, le mode de remboursement des emprunts généralement employé (tirage au sort) ne permet pas de prévoir à quelle époque on sera obligé de faire des remplois d'argent et par conséquent des placements nouveaux. L'évaluation des usufruits et nues propriétés ne peut donc présenter une exactitude rigoureuse.

Comme exemple d'évaluation, prenons le cas de la rente française perpétuelle 3 o/o. Si l'âge de l'usufruitier est x, et si l'on suppose qu'aucune conversion ne surviendra, sa vie durant, la valeur de l'usufruit de 3 fr. de rente sera, au taux i :

$$U = 3 \times {}_4a_x = 3\left(a_x + \frac{3}{8}\right). \qquad (1)$$

En faisant une hypothèse sur le cours de la rente au décès de l'usufruitier, et en désignant ce cours hypothétique par C, on pourra calculer la valeur actuelle de la nue propriété de 3 fr. de rente :

$$A = C\frac{M_x}{D_x} = C(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x). \qquad (2)$$

Le cours de la rente variant en somme entre des limites assez étroites : 90 à 100, on pourra prendre pour C par exemple une valeur comprise entre 90 et 95. Les Compagnies d'assurances qui font des achats de nues propriétés prennent assez généralement 90 pour valeur de C, en laissant ainsi une marge suffisante pour prévenir une dépréciation possible du 3 o/o.

On peut aussi considérer la nue propriété précédente comme la valeur actuelle d'un revenu annuel de 3 fr., qui sera payable perpétuellement à partir du décès de l'usufruitier [1], ce qui revient à supposer toute conversion de rente impossible :

$$A = \frac{3}{(1+r)^{1/4}-1} - U = \frac{3}{(1+r)^{1/4}-1} - 3\left(a_x + \frac{3}{8}\right). \quad (3)$$

En prenant comme taux d'évaluation 3 1/2 o/o :

$$i = 0{,}035$$

et en supposant la valeur du capital, au décès de l'usufruitier, égale aux neuf dixièmes du capital nominal P, d'après l'hypothèse habituelle des Compagnies d'assurances, la valeur de l'usufruit est :

$$U = 3\left(a_x + \frac{3}{8}\right)$$

[1] Si l'on veut, on peut assimiler l'usufruit à une rente viagère reposant sur une tête d'âge x, et la nue propriété à une rente de survie sur une tête immortelle, payable après le décès de la tête d'âge x; la relation (3) est bien équivalente à la relation :

$$R\, a_{\frac{x}{y}} = R(a_y - a_{xy}),$$

si l'on suppose la tête y immortelle. Ra_y est alors la toute propriété du capital considéré.

et celle de la nue propriété :

$$A = \frac{9}{10} P (1{,}035)^{-\frac{1}{2}} (1 - 0{,}035 a_x).$$

a_x dans ces formules est donné par la table RF 3 1/2 o/o.

Il peut se faire qu'un usufruit soit temporaire. Un mineur, par exemple, peut jouir de l'usufruit d'une valeur jusqu'à sa majorité. Le nu propriétaire jouira alors de la toute propriété soit au décès de l'usufruitier, soit au plus tard à sa majorité : la nue propriété est assimilable à un capital assuré au moyen d'un contrat mixte : $C \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$.

Rentes de survie temporaires. — Dans l'étude, faite plus haut, des rentes de survie, nous n'avons considéré que des rentes de survie payables jusqu'à la mort du bénéficiaire, à partir de celle de l'assuré. La durée des rentes de survie peut être assujettie à des conditions différentes, et l'on peut avoir à considérer des rentes temporaires, servies aux conditions ci-après énumérées :

1° Le service de la rente, de terme annuel R, peut cesser au plus tard dans n années, quelle que soit l'époque du décès de l'assuré d'âge x. La prime unique est la différence des primes uniques de deux rentes temporaires de n années constituées, la première sur la tête bénéficiaire d'âge y, la deuxième sur les deux têtes sans réversion :

$$\Pi = R\left(a_y^{(n)} - a_{xy}^{(n)}\right).$$

Le risque décroît au fur et à mesure que les âges augmentent; de même que pour les assurances en cas de décès de capitaux décroissant en progression arithmétique, l'assureur ne doit pas consentir une prime annuelle constante.

2° Si la rente de survie ne s'éteint qu'au moment du décès du bénéficiaire, le service de cette rente ayant commencé au décès de l'assuré, à la condition que ce décès soit survenu dans les n premières années du contrat, la prime unique s'obtient en retranchant de la prime unique d'une rente immédiate sur la tête y bénéficiaire :

1° La prime unique de la rente payable en cas de vie simultanée des deux têtes x et y pendant les n premières années du contrat;

2° La prime unique de la rente R différée de n années sur la tête y et payable seulement en cas de vie de x à la fin de la n^e année :

$$\Pi = R\left[a_y - a_{xy}^{(n)} - \overset{n}{a}_y \overset{n}{p}_x\right];$$

3° La rente de survie peut enfin n'être servie à y que pendant les n années qui suivront le décès de x. Le terme de rente R, venant à échéance dans k années, n'est payable que si y vit à cette époque, et si x est mort depuis moins de n années; sa valeur actuelle est donc :

$$R\overset{k}{p}_y\left(\overset{k-n}{p}_x - \overset{k}{p}_x\right)(1+i)^{-k}. \qquad (1)$$

Si $n > k$, la probabilité $\overset{k-n}{p}_x$ devient une certitude et l'expression s'écrit :

$$R\overset{k}{p}_y\left(1 - \overset{k}{p}_x\right)(1+i)^{-k}. \qquad (2)$$

La prime unique s'obtient en faisant la somme d'expressions analogues à (2) quand k varie de 1 à n,

et d'expressions analogues à (1) quand k varie de n à l'infini, soit :

$$\Pi = R\sum_1^n p_y^k (1 - p_x^k)(1+i)^{-k} + R\sum_{n+1}^{\infty} p_y^k (p_x^{k-n} - p_x^k)(1+i)^{-k}$$

$$= R\left[a_y^{(n)} - a_{xy}^{(n)} - a_{xy}^{n} + \sum_{n+1}^{\infty} p_y^k p_x^{k-n} (1+i)^{-k}\right].$$

Or $$\sum_{n+1}^{\infty} p_y^k p_x^{k-n} (1+i)^{-k} = (1+i)^{-n} p_y^n \sum_1^{\infty} p_{x,y+n}^{k-n} (1+i)^{-(k-n)}$$

$$= P_y^n a_{x,y+n} = \frac{a_{x-n,y}^n}{p_{x-n}^n},$$

$$\Pi = R\left[a_y^{(n)} - a_{xy} + P_y^n a_{x,y+n}\right] = R\left[a_y^{(n)} - a_{xy} + \frac{a_{x-n,y}^n}{p_{x-n}^n}\right].$$

Les rentes de survie temporaires peuvent être payables par semestres ou par trimestres; il suffira de remplacer les annuités payables annuellement par les annuités correspondantes.

Si la rente commence au jour même du décès, on traite la question comme on l'a fait plus haut page 163.

Rentes servies par la Caisse nationale des Retraites[1]. — Ces rentes peuvent être constituées à capital aliéné ou à capital réservé. Les premières ne diffèrent pas de celles qui ont été étudiées précédemment. Au contraire, les rentes à capital réservé sont telles que le capital ou les primes qui ont servi à les constituer sont remboursés aux héritiers du rentier lors de son décès, à quelque époque qu'il survienne.

[1] Voir plus loin opérations de la Caisse nationale des retraites, page 285 et suivantes.

Si la rente est immédiate, le rentier ne fait que toucher à chaque échéance, c'est-à-dire à la fin de chaque trimestre, les intérêts du capital, correspondant à la période écoulée, et le capital placé sera restitué au décès du rentier. Si la rente est différée de n années, sur une tête d'âge x, et est produite par le versement d'un capital Π, cette somme Π est la valeur actuelle de la rente viagère r différée de n années et servie trimestriellement, augmentée de la valeur actuelle du remboursement de Π effectué au décès du rentier :

$$\Pi = r\left(a_x^n + \frac{3}{8} P_x^n\right) + \Pi(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - ia_x)$$

$$= r\frac{N_{x+n+1} + \frac{3}{8} D_{x+n}}{D_x} + \Pi \frac{M_x}{D_x}.$$

Si la rente a été constituée au moyen de n versements annuels, le remboursement des primes versées équivaut à une assurance au décès, temporaire de n années, de capitaux ϖ, 2ϖ, ... croissant en progression arithmétique de raison ϖ, et à une assurance au décès différée de n années, au capital $n\varpi$:

$$\varpi\left(1 + a_x^{(n-1)}\right) = r\left(a_x^n + \frac{3}{8} P_x^n\right) + \varpi \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x},$$

$$\varpi(N_x - N_{x+n}) = r\left(N_{x+n+1} + \frac{3}{8} D_{x+n}\right) + \varpi(R_x - R_{x+n}),$$

$$\varpi = r\frac{N_{x+n+1} + \frac{3}{8} D_{x+n}}{(N_x - N_{x+n}) - (R_x - R_{x+n})}.$$

Les rentes viagères servies par la Caisse nationale des retraites sont dites avec arrérages au décès, parce que

le prorata d'arrérages couru depuis le commencement de la période dans laquelle se produit le décès jusqu'au décès lui-même est payé par la Caisse aux héritiers du rentier décédé. Avec l'hypothèse habituelle des décès en milieu de période, cela revient au payement d'un capital égal au demi-terme de la rente lors du décès du rentier. Si la rente est immédiate, la prime unique de la combinaison s'écrit :

$$\Pi = r\left(a_x + \frac{k-1}{2k} + \frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}}{2k}(1 - ia_x)\right)$$

$$= r\left[\frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{k-1}{2k} + \frac{1}{2k}\,\frac{M_x}{D_x}\right].$$

Pour $k = 4$,

$$\Pi = r\,\frac{8N_{x+1} + M_x + 3D_x}{8D_x}.$$

Si la rente est différée de n années, les arrérages au décès ne seront dus qu'à partir de l'entrée en jouissance :

$$\Pi = r\left[{}_n a_x + {}_n P_x\,\frac{k-1}{2k} + \frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}}{2k}\,(1 - ia_{x+n})\,{}_n P_x\right]$$

$$= \frac{r}{D_x}\left[N_{x+n+1} + \frac{k-1}{2k}\,D_{x+n} + \frac{M_{x+n}}{2k}\right].$$

CHAPITRE III

DES CONTRATS

K. — TARIFS

Nécessité du chargement. — Les primes que nous avons calculées jusqu'ici ont été déterminées de telle façon que, la table de mortalité et le taux de capitalisation étant choisis, les engagements de l'assureur fassent exactement équilibre à ceux de l'assuré. Ces primes sont désignées sous le nom de *primes pures*.

Si les Compagnies d'assurances n'avaient à faire face à d'autres dépenses qu'au payement des sommes assurées, aux diverses échéances, si le taux de capitalisation ayant servi au calcul des primes pures coïncidait avec le taux réel de placement, et si la mortalité était absolument conforme à celle qui est indiquée par la table adoptée, le crédit du compte de chaque catégorie d'assurance balancerait exactement son débit, et il n'y aurait alors ni bénéfice ni perte.

Mais les Compagnies doivent rémunérer les services des intermédiaires, agents ou courtiers, qui leur apportent des affaires nouvelles. Chaque contrat est grevé de ce fait, dès sa conclusion, de frais d'acquisition ou commission. De plus, elles doivent payer un nombreux personnel d'employés, de garçons de recettes;

acquérir et entretenir un matériel considérable; s'installer dans des immeubles à loyer coûteux; réaliser enfin des bénéfices pour pouvoir distribuer un dividende convenable aux actionnaires.

Le taux de capitalisation qui a servi au calcul des primes peut devenir trop élevé; il ne sera cependant pas possible de faire payer aux anciens assurés des primes supérieures à celles qui figurent à leurs contrats. Enfin, des années néfastes peuvent survenir, pendant lesquelles la mortalité dépassera de beaucoup les prévisions (épidémies, cataclysmes, etc.). Il est de l'intérêt même des assurés, s'ils ne veulent pas voir sombrer l'entreprise en laquelle ils ont placé leur confiance, que cette entreprise puisse s'assurer la possession de réserves suffisantes (en dehors des réserves mathématiques obligatoires dont nous parlerons plus loin), réserves de prévoyance, réserves pour fluctuations de valeurs, destinées à la mettre à l'abri des éventualités fâcheuses.

Pour toutes ces raisons, il est nécessaire de majorer les primes pures, la majoration (ou chargement) étant proportionnée à l'importance de la prime et calculée de façon à permettre à l'assureur de faire face aux frais qu'entraîne la gestion de son entreprise et de constituer les réserves indispensables à sa sécurité, tout en lui laissant la possibilité de réaliser un bénéfice légitime.

Ancien tarif à la prime pure. Chargement implicite. — Autrefois, cependant, les Compagnies françaises d'assurances sur la vie calculaient les primes pures au taux de 4 %, d'après les tables de mortalité

de Duvillard et de Deparcieux, et elles n'ajoutaient aucun chargement aux primes ainsi calculées : elles réalisaient néanmoins des bénéfices importants, surtout dans toutes les catégories où le risque de décès prédomine. C'est que la table de Duvillard, qui était employée pour le calcul des primes de ces catégories, est une table qui indique une mortalité beaucoup plus rapide que la mortalité réelle, au moins jusqu'à un âge très avancé. Les primes calculées à l'aide de cette table étaient donc trop fortes, et le chargement, pour être implicite, n'était pas moins réel. Les bénéfices furent même tels, qu'il vint à l'idée des Compagnies d'en abandonner, dans un but de réclame, une partie, généralement la moitié, à leurs assurés en cas de décès.

Dans le cas des assurances de capitaux différés et des rentes viagères, il eût fallu, pour obtenir un chargement implicite, adopter une table à mortalité plus lente que la mortalité réelle des rentiers viagers. On pensait que la table de Deparcieux, accusant une mortalité moins rapide que celle de Duvillard, et ayant été établie d'après l'observation de membres de diverses tontines, c'est-à-dire d'assurés de choix, remplirait cette condition. On s'aperçut bientôt qu'il en était tout autrement, et si l'on réussit à éviter les pertes sur ces catégories, ce ne fut que grâce au choix du taux de capitalisation de 4 % qui pouvait être alors facilement dépassé.

Participation aux bénéfices. — Nous avons dit plus haut que les tarifs vie entière calculés à la prime pure, à l'aide de la table de Duvillard, avaient donné aux Compagnies de beaux bénéfices, et que

celles-ci avaient eu l'idée d'en distribuer la moitié à leurs assurés. Présentée ainsi, la chose peut n'apparaître point sous un jour absolument exact, car il faut s'entendre sur la signification de ce mot : bénéfices.

Les bénéfices réalisés par les Compagnies d'assurances sur la vie ont deux sources : la bonne gestion financière, qui permet de dépasser le taux de capitalisation prévu, et l'élévation des tarifs. Or, quand on fait l'inventaire annuel dans les Compagnies d'assurances, on calcule les intérêts de toutes les sommes portées aux comptes des diverses catégories au taux adopté pour le calcul des primes, et la différence entre ce taux et le taux de placement réel n'apparaît pas dans chaque catégorie, mais il est porté en bloc au « Profits et pertes ». Il ne saurait donc être question de distribuer à une catégorie quelconque d'assurés le bénéfice provenant des opérations financières faites par la Compagnie. Et c'est logique; car, comme le dit M. de Courcy, « les assurés sont étrangers à toutes les chances, bonnes ou mauvaises, des placements, et à toute la gestion financière. Et cela doit être. Les assurés ne sont pas des actionnaires; ils n'ont pas chargé la Compagnie de spéculer pour eux à la Bourse ni ailleurs, ni de bâtir pour eux des maisons, ni d'acheter pour eux des terrains. Ils lui ont demandé une assurance, une garantie, ce qui est précisément l'inverse d'une spéculation. Ils lui ont apporté des sommes fixes, déterminées par un tarif librement débattu; en revanche, la Compagnie s'est engagée, à ses risques et périls et à forfait, à payer une somme fixe. Il est bien juste qu'elle dispose de l'argent à sa guise et qu'elle ait toutes les chances de ses opérations. »

Le seul bénéfice que les comptes particuliers des catégories fassent apparaître et qui puisse par conséquent être distribué aux assurés, est celui qui résulte de la trop grande élévation des tarifs, c'est-à-dire, dans le cas d'un tarif établi à la prime pure, de la différence entre la mortalité prévue et la mortalité réelle.

Le tarif vie entière calculé à la prime pure Duvillard au taux de 4 % était dit : *tarif avec participation,* et donnait lieu, à la fin de chaque exercice, à la répartition entre tous les assurés de la catégorie, de la moitié des bénéfices [1] établis ainsi qu'il vient d'être dit. Mais on offrait en même temps au public un *tarif sans participation,* obtenu en réduisant de 1/10e les primes précédentes.

Des tarifs avec participation avaient aussi été établis pour les assurances mixtes et à terme fixe d'une durée de dix années au moins. Mais l'assurance mixte est la combinaison d'une assurance temporaire au décès et d'une assurance de capital différé en cas de vie. Le bénéfice résultant de l'emploi de la table de Duvillard pour le calcul de la première portion de la prime est compensé en grande partie par l'emploi de la même table pour la deuxième portion. Dans l'assurance à terme fixe à primes annuelles, le risque de décès est encore moins important, et le bénéfice à attendre de l'emploi de la prime pure Duvillard est assez aléatoire. Aussi, les Compagnies avaient-elles adopté pour ces deux combinaisons le tarif à la prime pure comme

[1] Certaines Compagnies distribuaient à leurs assurés 80 % des bénéfices.

tarif sans participation, en admettant que celui-ci se déduisait toujours du tarif avec participation, en réduisant de 1/10e les primes, ce qui revenait à adopter comme primes avec participation les primes pures majorées de 1/9e de leur valeur.

Chaque année, ou tous les deux ans, suivant les Compagnies, on établissait le compte de participation de chaque assuré, on déterminait la somme qui lui revenait [1], et l'intéressé pouvait ou bien toucher immédiatement cette somme, ou la laisser à la Compagnie dans le but soit d'augmenter le capital assuré, soit de réduire les primes futures. La somme susdite était alors considérée comme la prime unique d'une assurance de même nature que la combinaison primitive, ou d'une rente viagère ou temporaire dont le versement annuel au compte de chaque assuré diminuait sa prime d'autant.

Il nous reste à dire comment on répartissait les bénéfices entre les diverses classes d'assurés d'une même catégorie. Deux méthodes étaient employées (et le sont d'ailleurs encore aujourd'hui). Certaines Compagnies, comme la Compagnie d'Assurances Générales, totalisaient les primes payées par chaque assuré et répartissaient les bénéfices proportionnellement aux totaux ainsi obtenus. D'autres Compagnies, comme la Nationale, faisaient cette répartition proportionnellement au

[1] La participation était même parfois dite *escomptée*, dans le cas des assurances vie entière: l'assuré n'avait plus alors droit aux répartitions de bénéfices, mais il n'avait qu'un nombre limité de primes à payer. La combinaison se ramenait à une assurance vie entière à primes temporaires : il n'y avait plus de participation proprement dite.

total des primes versées sur chaque contrat et capitalisées d'après un taux fixé à l'avance. On aperçoit immédiatement que ces deux modes de répartition ne sont pas équitables, en ce qu'ils favorisent les assurés anciens au détriment des nouveaux. Un assuré entré à l'âge x qui a déjà versé N primes annuelles touchera, à la fin de l'exercice, d'après le procédé de la Générale, N fois plus que l'assuré qui n'a versé encore qu'une prime. Cependant le bénéfice, provenant de la différence entre la mortalité réelle et la mortalité présumée, appartient également à toutes les classes d'assurés. Au contraire, si l'on fait usage pour le calcul des primes d'une table indépendante de l'âge à l'entrée, le bénéfice sera surtout produit par les têtes récemment entrées dans l'assurance, qui viennent de subir la sélection médicale. Or, dans les deux systèmes employés, ces assurés sont complètement désavantagés au profit des anciens. Ces derniers bénéficient d'une grande partie des sommes qui seraient en toute logique dues aux assurés récents. Ceux-ci, plus tard, s'ils survivent, bénéficieront à leur tour des surprimes perçues sur les nouveaux venus, et ainsi de suite jusqu'au jour où les bénéfices diminueront, pour disparaître même tout à fait, soit que la mortalité réelle ait dépassé les prévisions, soit que, suivant une loi bien connue, la baisse du loyer de l'argent ne permette plus d'atteindre le taux de capitalisation adopté. Les assurés avec participation payeront alors des primes d'un dixième plus élevées que les assurés sans participation, et ils ne tireront de cette surprime aucun avantage, puisqu'il n'y aura plus de bénéfices à distribuer.

La participation aux bénéfices, au début, jouit d'une

grande faveur; certains assurés parvinrent, avec le système adopté par la Nationale, non seulement à ne plus payer de primes au bout d'un temps suffisant, mais encore à toucher une rente viagère, tout en restant assurés en vie entière. Les Compagnies étrangères usèrent beaucoup et abusèrent même de ce moyen de réclame. Toutefois, les assurés finirent par s'apercevoir du défaut du système qui tomba en défaveur. Et si les Compagnies françaises ont, par habitude, et poussées par la concurrence étrangère, conservé des catégories d'assurances avec participation, elles n'ont pas développé leur portefeuille de ce côté : ces catégories sont, avec raison, de plus en plus délaissées.

Primes portant intérêt. — Quelques Compagnies avaient autrefois songé à remplacer la participation aux bénéfices par un autre système qui consistait à faire rapporter aux primes un certain intérêt. Ce n'était plus, à vrai dire, une véritable participation aux bénéfices, puisque la somme à attribuer aux assurés à la fin de chaque exercice était déterminée à l'avance et ne nécessitait pas le calcul du bénéfice réalisé sur chaque catégorie ; cependant le but était le même, et les assurés, au fur et à mesure qu'ils avaient payé un plus grand nombre de primes, voyaient leurs obligations diminuer, et d'une *façon certaine*. Comme dans la participation ordinaire, les tarifs étaient d'autant plus élevés que le risque était moindre, puisque plus l'assuré vieillissait, moins il payait, ce qui n'est peut-être pas très logique. A un autre point de vue, cela obligeait la Compagnie à constituer une grande masse de réserves mathématiques, ce qui n'est pas avantageux

lorsque le loyer de l'argent diminue et lorsque le taux de capitalisation ne peut plus être atteint.

Quoi qu'il en soit, ce mode de répartition est absolument abandonné aujourd'hui, et nous nous bornerons à faire remarquer que le calcul des primes annuelles était fort simple. L'assuré versait, en effet, une prime égale à ϖ chaque année; mais il touchait, en désignant par r le taux d'intérêt adopté, ϖr au bout de la première année (au moment du payement de la deuxième prime), $2\varpi r$ au bout de la deuxième année, etc. Si l'assurance était temporaire de n' années, à primes annuelles payables pendant n années, le versement des intérêts se ramenait au payement d'une rente temporaire de n' années croissant en progression arithmétique d'abord :

$$\varpi r,\ 2\varpi r,\ \ldots\ n\varpi r,$$

puis constante et égale à $n\varpi r$ ensuite. Si les primes étaient viagères, cette rente était viagère et croissait en progression arithmétique, ou, ce qui revient au même, les primes décroissaient suivant une loi analogue; elles étaient successivement égales à

$$\varpi,\ \varpi - \varpi r,\ \varpi - 2r\varpi,\ \ldots\ \varpi - nr\varpi,\ \ldots$$

Ces remarques rendent immédiat le calcul des primes des combinaisons de ce genre.

Comparaison entre les anciens tarifs et les nouveaux. — Nous donnons ci-dessous un tableau permettant de comparer l'ancien tarif vie entière, calculé à l'aide de la table de Duvillard au taux de 4 0/0, avec le nouveau, calculé au moyen de la table AF au

taux de 3 1/2 o/o. Il est à remarquer qu'autrefois on calculait la prime unique vie entière au moyen de la formule :

$$\Pi = 1 - ia_x.$$

On négligeait ainsi le coefficient $(1,04)^{-\frac{1}{2}}$ et la prime annuelle :

$$\frac{1 - ia_x}{1 + a_x}$$

était augmentée de : $1 - (1,04)^{-\frac{1}{2}} = 0,0195$ ...
soit de 2 o/o environ.

Chargement rationnel. Nouveaux tarifs. — Quand les Compagnies françaises eurent achevé l'établissement de leurs tables de mortalité nouvelles AF et RF construites d'après l'observation de leurs propres assurés, elles firent paraître de nouveaux tarifs basés sur ces tables. Mais comme le taux de capitalisation de 4 o/o, autrefois très facilement atteint, parut alors trop élevé, on décida d'adopter le taux de 3 1/2 o/o, qui était plus en harmonie avec le loyer réel de l'argent que peut obtenir une entreprise soucieuse de ne rechercher que des placements absolument sûrs. Les tarifs furent donc calculés d'après les tables AF et RF et le taux de 3 1/2 o/o.

Mais il ne s'agissait plus alors de calculer des tarifs à la prime pure; aucun chargement n'était en effet implicitement contenu dans ces primes pures, puisque les tables de mortalité nouvelles représentaient bien effectivement la mortalité réelle de la clientèle des Compagnies d'assurances. De plus, le taux adopté était

COMPAGNIES FRANÇAISES

ASSURANCES VIE ENTIÈRE A PRIMES VIAGÈRES

Primes assurant un capital de 100 francs

AGE de L'ASSURÉ	TARIF ANCIEN DUVILLARD 4 %				TARIF NOUVEAU A-F 3 1/2 %			
	AVEC PARTICIPATION		SANS PARTICIPATION		AVEC PARTICIPATION		SANS PARTICIPATION	
	Prime unique	Prime annuelle viagère	Prime unique	Prime annuelle viagère	Prime unique	Prime annuelle viagère	Prime unique	Prime annuelle viagère
26 ans	37fr58	2fr26	33fr82	2fr03	48fr73	2fr41	43fr86	2fr17
28 —	38.73	2.37	34.86	2.13	50.18	2.53	45.16	2.28
30 —	39.92	2.49	35.93	2.24	51.71	2.67	46.54	2.40
32 —	41.16	2.62	37.04	2.36	53.33	2.81	48 »	2.53
34 —	42.46	2.76	38.21	2.48	55.03	2.98	49.53	2.68
36 —	43.84	2.92	39.46	2.63	56.82	3.16	51.14	2.84
38 —	45.31	3.09	40.78	2.78	58.69	3.36	52.82	3.03
40 —	46.86	3.28	42.17	2.95	60.65	3.59	54.59	3.23
42 —	48.50	3.50	43.65	3.15	62.69	3.83	56.42	3.45
44 —	50.23	3.74	45.21	3.37	64.81	4.11	58.32	3.70
46 —	52.05	4.01	46.85	3.61	66.99	4.42	60.29	3.98
48 —	53.95	4.31	48.55	3.88	69.25	4.77	62.32	4.29
50 —	55.94	4.66	50.35	4.19	71.56	5.16	64.40	4.64

sensiblement le taux de placement obtenu dans la pratique.

Il fut donc nécessaire d'ajouter aux primes pures calculées d'après les méthodes indiquées au chap. II un chargement destiné à couvrir les frais de toute nature qu'entraîne la gestion d'une entreprise d'assurances sur la vie, tout en ménageant à cette entreprise même un bénéfice légitime. On obtint ainsi des tarifs commerciaux sans participation ; aucune partie du chargement n'avait été réservée en vue d'obtenir des bénéfices à répartir entre les assurés. Et en effet, avec des tarifs établis et chargés rationnellement, la participation n'a plus sa raison d'être. Pourquoi demander à l'assuré de payer une prime exagérée en lui promettant de lui rendre plus tard la moitié du trop perçu, à la condition toutefois que la gestion financière de l'entreprise ait été bonne? L'assurance au décès n'est pas un placement, c'est une œuvre de prévoyance, et l'assuré ne demande pas à la Compagnie de gérer et de faire fructifier ses économies, mais de le mettre à l'abri d'éventualités désastreuses pour lui ou les siens.

Cependant, par habitude, et pour soutenir la concurrence des Compagnies étrangères, les Compagnies françaises firent paraître pour les assurances au décès un tarif avec participation dont les primes furent obtenues d'après l'ancien procédé employé pour les mixtes, en majorant de 1/9 les primes commerciales sans participation. Nous allons indiquer comment on peut calculer rationnellement ces dernières.

Calcul des primes commerciales. — Nous désignerons, suivant un usage généralement adopté,

par Π'' et ϖ'' les primes commerciales, les primes au tarif, unique et annuelle, d'un contrat dont les primes pures correspondantes sont Π et ϖ, et par F la valeur actuelle au moment de la signature de la police des frais d'acquisition y relatifs, déboursés généralement à ce moment même (commission escomptée). L'encaissement des primes nécessite des frais : nous supposerons qu'ils s'élèvent à une fraction ε des primes touchées. La somme réellement encaissée sera :

$$\Pi''(1-\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \varpi''(1-\varepsilon).$$

Supposons que l'on ait évalué les frais annuels de gestion proprement dits de l'entreprise (loyer, achat et entretien du matériel, salaire des employés, impôts, etc.), et qu'on les ait répartis sur tous les contrats en cours, la part incombant à chacun d'eux étant constante d'année en année et égale à g. Ajoutons à g le chargement annuel b destiné à produire le bénéfice que l'on désire réaliser sur le contrat considéré, et, à cause de la difficulté d'évaluation de ces deux chargements, réunissons-les en posant :

$$g+b=f.$$

Au début de chaque année d'assurance, au moment du payement de la prime, la Compagnie devra prélever sur cette prime une somme f. La valeur actuelle de ce chargement, au moment du calcul de la prime unique, est : $f(1+a_G)$,
en supposant que le contrat restera en vigueur aussi longtemps que vivra le groupe G.

Des explications qui précèdent résulte immédiatement la valeur de la prime commerciale unique :

$$(1-\varepsilon)\Pi''=\Pi+F+f(1+a_G). \qquad (1)$$

Si la prime est annuelle et payable pendant toute la durée de vie du groupe Γ, on sait que

$$\Pi'' = \varpi''(1 + a_\Gamma),$$
$$\Pi = \varpi(1 + a_\Gamma).$$

et la relation (1) donne :

$$(1-\varepsilon)\varpi'' = \varpi + \frac{F}{1 + a_\Gamma} + f\frac{1 + a_G}{1 + a_\Gamma}. \qquad (2)$$

En particulier, si les primes sont payables pendant toute la durée du contrat,

$$a_G = a_\Gamma,$$

et la relation (2) se réduit à :

$$(1-\varepsilon)\varpi'' = \varpi + f + \frac{F}{1 + a_G}. \qquad (2)'$$

Ainsi, si l'on considère un contrat vie entière à primes viagères, sur une tête d'âge x, la prime commerciale annuelle du contrat sera donnée par l'égalité :

$$(1-\varepsilon)\varpi'' = C\frac{M_x}{N_x} + f + F \cdot \frac{D_x}{N_x}$$
$$= C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\frac{1 - ia_x}{1 + a_x} + f + \frac{F}{1 + a_x},$$

et si le contrat ne comporte que le payement de n primes au plus, on aura :

$$(1-\varepsilon)\varpi''_{(n)} = C\frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} + f\frac{N_x}{N_x - N_{x+n}} + F\frac{D_x}{N_x - N_{x+n}}$$
$$= C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\frac{1 - ia_x}{1 + a_x^{(n-1)}} + f\frac{1 + a_x}{1 + a_x^{(n-1)}} + \frac{F}{1 + a_x^{(n-1)}}.$$

Il peut se faire que la prime pure ϖ soit fonction de la prime commerciale. C'est ce qui arrive pour toutes les polices souscrites avec contre-assurance. La prime pure contient alors une partie qui doit servir au remboursement des primes commerciales versées dans certaines conditions. Nous reportant au chap. II, page 174, où le problème relatif aux contre-assurances a été traité, nous voyons que les formules générales (1) et (2) qui y ont été données doivent être modifiées de la façon suivante, après introduction des primes commerciales ϖ'' et Π'' :

$$\Pi = C\Pi^n + \Pi''\Pi^{(n)}, \qquad (3)$$

$$\varpi = C\varpi^n + \varpi''\varpi^{(n)}; \qquad (4)$$

car les primes qui sont remboursées en cas de décès de l'assuré pendant la durée du différé sont les primes commerciales et non les primes pures.

En portant ces valeurs des primes pures dans les relations écrites plus haut, on voit que la prime commerciale est donnée par une relation du premier degré :

$$(1-\varepsilon)\Pi'' = C\Pi^n + \Pi''\Pi^{(n)} + F + f(1+a_G)$$

$$(1-\varepsilon)\varpi'' = C\varpi^n + \varpi''\varpi^{(n)} + \frac{F}{1+a_\Gamma} + f\frac{1+a_G}{1+a_\Gamma}.$$

Rappelons que dans ces expressions Π^n et ϖ^n sont les primes, unique et annuelle, de l'assurance différée au capital 1 sans contre-assurance, que $\Pi^{(n)}$ est la prime unique de l'assurance au décès, temporaire de n années, d'un capital égal à l'unité, et enfin que $\varpi^{(n)}$ est la prime annuelle de l'assurance temporaire au décès en progression arithmétique de capitaux successivement égaux à 1, 2 ,... n.

Comme application, considérons l'assurance d'un capital différé C sur une tête d'âge x avec contre-assurance. La prime unique pure est :

$$\Pi = C P_x^n + \Pi''(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - P_x^n - i a_x^{(n)}\right)$$
$$= C\frac{D_{x+n}}{D_x} + \Pi''\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x},$$

et la prime unique commerciale est donnée par l'une des relations :

$$(1-\varepsilon)\Pi'' = C P_x^n + \Pi''(1+i)^{-\frac{1}{2}}(1 - P_x^n - i a_x^{(n)}) + F$$
$$+ f\left(1 + a_x^{(n-1)}\right),$$

$$(1-\varepsilon)\Pi'' = \frac{C D_{x+n} + \Pi''(M_x - M_{x+n}) + F D_x + f(N_x - N_{x+n})}{D_x}$$

c'est-à-dire :

$$\Pi'' = \frac{C P_x^n + F + f\left(1 + a_x^{(n-1)}\right)}{1 - \varepsilon - (1+i)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - P_x^n - i a_x^{(n)}\right)}$$
$$= \frac{C D_{x+n} + F D_x + f(N_x - N_{x+n})}{D_x(1-\varepsilon) - (M_x - M_{x+n})}.$$

La prime annuelle ϖ'' de la même combinaison, payable pendant toute la durée du différé, s'exprime d'une façon analogue :

$$\varpi''(1-\varepsilon) = \frac{C P_x^n}{1 + a_x^{(n-1)}}$$

$$+ \varpi''(1+i)^{-\frac{1}{2}}\frac{1 - (n+1)P_x^n + a_x^{(n)} - i A_x^{(n)}}{1 + a_x^{(n-1)}} + f + \frac{F}{1 + a_x^{(n-1)}}$$

$$= C\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + \varpi''\frac{R_x - R_{x+n} - n M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + f + \frac{F}{1 + a_x^{(n-1)}}.$$

L'application des formules (1), (2), (3) et (4) conduira de même à la détermination de la prime commerciale des combinaisons usuelles avec contre-assurance : rentes différées, capitaux ou rentes de survie.

Si l'on reprend l'analyse faite à propos de l'assurance dotale avec contre-assurance, on voit que la valeur actuelle des engagements du contractant au début du contrat est :

$$\varpi''\left(1+a_{xy}^{(n-1)}\right),$$

en adoptant les notations habituelles (se reporter pages 178 et suiv.). La valeur actuelle des engagements de l'assureur se déduit de l'expression de la page 180 en y substituant simplement la prime commerciale ϖ'' à la prime pure ϖ et en y ajoutant la valeur des frais d'acquisition et des frais de gestion. Ce qui donne :

$$\frac{\varpi''}{D_x}\sum_1^n k p_y^{k-1}(M_{x+k-1}-M_{x+k})+C\frac{D_{x+n}}{D_x}+f\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}+F.$$

On obtient, en tenant compte des frais d'encaissement :

$$\varpi''(1-\varepsilon)\left(1+a_{xy}^{(n-1)}\right)=\frac{1}{D_x}\Big[\varpi''\sum_1^n k p_y^{k-1}(M_{x+k-1}-M_{x+k})$$
$$+CD_{x+n}+f(N_x-N_{x+n})+FD_x\Big],$$

ou :

$$\varpi''=\frac{CD_{x+n}+f(N_x-N_{x+n})+FD_x}{(1-\varepsilon)(1+a_{xy}^{(n-1)})D_x-\Sigma_1^n k p_y^{k-1}(M_{x+k-1}-M_{x+k})}.$$

Détermination des frais qu'entraîne la gestion d'une entreprise d'assurances. —

Commissions. — Il nous reste à montrer comment on peut déterminer aussi exactement que possible les divers éléments d'un chargement rationnel, c'est-à-dire les quantités que nous avons désignées par les notations F, f, ε.

La réalisation des contrats d'assurance est généralement poursuivie par des courtiers ou des agents de la Compagnie. Il est juste de leur attribuer une commission en rémunération des démarches faites et du temps dépensé par eux. Le courtier est l'intermédiaire entre l'assuré et la Compagnie; il recherche les affaires nouvelles, facilite la conclusion des contrats; un bon courtier est un auxiliaire précieux dans une Compagnie d'assurances : aussi les Compagnies soucieuses de leurs intérêts ne ménagent pas les commissions aux courtiers et aux agents sérieux.

Certaines Compagnies, prenant surtout en considération l'augmentation de leur portefeuille, rémunèrent les agents qui leur apportent des affaires nouvelles en leur attribuant un tant pour cent du capital assuré, ou de la prime unique s'il s'agit de rentes viagères. Si cette méthode est logique dans le cas d'assurances comportant le payement d'une prime unique au moment même où le contrat prend effet, et même dans le cas général des assurances en cas de vie, elle ne l'est plus dans le cas de contrats au décès souscrits à primes annuelles, et on en aperçoit aisément le défaut. Si l'on attribue, en effet, au courtier une commission égale à $\frac{kC}{100}$, en désignant par C le capital assuré, cette commission pourra être supérieure à la prime annuelle. Si on la paye au courtier au moment même

de la souscription du contrat, on risque de voir l'assuré refuser le payement de la deuxième prime, et alors l'assureur se trouve dans la situation bizarre qui consiste non seulement à avoir assuré pendant un an un risque contre lequel il n'était pas couvert, mais encore à avoir déboursé de l'argent pour faire une aussi mauvaise affaire. Et quand bien même la Compagnie, comme il arrive la plupart du temps, aurait stipulé que la commission, calculée ainsi qu'il vient d'être dit, ne peut dépasser le montant de la prime de première année, elle aurait fait encore une mauvaise opération.

Les Compagnies ont pour la plupart abandonné ce système et elles versent au courtier, pour les assurances au décès, un tant pour cent de la première prime (k °/₀), un tant pour cent de la deuxième et souvent de la troisième (k' °/₀), et un tant pour mille du capital (k'' °/₀₀). F est alors égal à :

$$F = \frac{k}{100}\varpi'' + \frac{k'}{100}\varpi''\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2}\right] + \frac{k''}{1000}C.$$

Ici encore il peut arriver que la commission déboursée au moment même de la souscription du contrat,

$$\frac{k\varpi''}{100} + \frac{k''C}{1000},$$

soit trop forte et dépasse même la première prime, auquel cas les inconvénients signalés plus haut se reproduisent.

Rationnellement, les frais d'acquisition ne devraient pas être payables d'un seul coup au début du contrat : les commissions dites escomptées sont un danger pour les Compagnies. Le payement de la commission de-

vrait s'échelonner sur plusieurs années, et même sur toute la durée du contrat. En tous cas la Compagnie devrait toujours garder, même la première année, une somme suffisante pour la garantie du risque assuré, et ne pas donner au courtier une rémunération supérieure à la réserve du contrat, ce qui ne ferait courir à la Compagnie aucun danger, car toute police ayant moins de trois ans de durée est résiliée purement et simplement lorsque le payement des primes cesse.

La concurrence empêche les Compagnies d'opérer rationnellement.

Frais de gestion, d'encaissement, d'administration; bénéfices. — A part les frais d'encaissement, les divers frais de gestion sont difficiles à répartir exactement. Il est tout naturel de supposer les frais d'encaissement proportionnels aux sommes encaissées elles-mêmes. Quant aux frais de gestion proprement dits, on peut, en fin d'exercice, les déterminer d'une façon globale, mais on ne saurait prétendre à les répartir par un procédé absolument rationnel; les frais généraux affectent, en effet, toutes les catégories à la fois, et il serait illusoire de vouloir fixer la part qui revient à chacune d'elles. Aussi on se contente de prendre pour f une valeur, variable avec chaque catégorie, suivant la durée des contrats, les résultats obtenus précédemment, etc., mais suffisante pour permettre à la Compagnie de payer ses frais généraux et de réaliser des bénéfices.

Ainsi l'expérience a montré que la mortalité des assurés en vie entière était plus rapide que celle des assurés en mixte, et que la mortalité des têtes ayant contracté une assurance temporaire était encore plus

rapide que celle des assurés en vie entière. Cependant les primes de ces diverses catégories sont calculées à l'aide de la même table. Aussi les Compagnies françaises, dans l'établissement de leurs nouveaux tarifs A F $3\,{}^1/_2\,{}^0/_0$, ont-ils ménagé un chargement, pour frais de gestion, plus élevé pour les catégories à mortalité plus rapide, qui laissent moins de marge aux bénéfices provenant de la différence entre la mortalité réelle et la mortalité déduite des statistiques antérieures.

Sauf pour les rentes viagères [1] immédiates, les frais de gestion sont supposés proportionnels au capital assuré. La plupart des Compagnies françaises ont adopté comme chargement pour frais de gestion 3,5 o/oo du capital pour les assurances mixtes, 4 o/oo pour les assurances vie entière et 8 o/oo pour les temporaires, ce qui justifie bien la remarque précédente.

Les frais d'encaissement sont généralement comptés à raison de 6 o/o des sommes encaissées.

Les divers chargements étant déterminés, pour calculer la prime commerciale d'une assurance donnée, il n'y a qu'à porter leur valeur dans les relations (1) et (2). f ne dépend généralement que du capital assuré; mais F est, la plupart du temps, proportionnel à la fois à la prime et au capital assuré. Dans cette hypothèse, les relations (1) et (2) fournissent des équations du premier degré en ϖ''.

Cependant, bien qu'on rémunère les agents d'après les règles données plus haut, on préfère, dans le calcul des primes, supposer les frais d'acquisition simplement

[1] Pour les rentes viagères immédiates, ils sont proportionnels à la rente elle-même.

proportionnels au capital assuré ou à la prime unique, s'il s'agit de rentes viagères. On détermine le facteur de proportionnalité de façon à ce que la Compagnie soit couverte de ses frais d'acquisition; on ne peut d'ailleurs pas à priori savoir combien telle ou telle affaire sera payée par la Compagnie; celle-ci, ayant intérêt à posséder de bons courtiers, accorde en général à ces derniers des commissions plus fortes et des rappels en fin d'exercice sur le chiffre de leur production, ce qui fait de la quantité F une quantité extrêmement variable. On préfère donc prendre une moyenne et supposer F proportionnel au capital assuré, ce qui smplifie le calcul des primes commerciales.

Décret du 20 janvier 1906. — Le décret du 20 janvier 1906, rendu en application de l'art. 9 (5e alinéa) de la loi du 17 mars 1905 relative à la surveillance et au contrôle des sociétés d'assurances sur la vie, a défini les bases d'après lesquelles doivent être calculées au minimum les primes des diverses opérations viagères et les réserves mathématiques correspondantes.

Le taux d'intérêt a été fixé à 3,5 o/o pour toutes les entreprises, à forme mutuelle ou anonyme. Les tables de mortalité à utiliser sont, pour les assurances en cas de décès la table AF, et pour les assurances en cas de vie, la table RF si la société paye des frais d'acquisition et la table CR si elle n'en paye pas. Ces deux tables sont d'ailleurs très voisines l'une de l'autre. La table CR indique une mortalité un peu plus rapide que la table RF.

Les chargements minima imposés sont les suivants:

1° Sociétés mutuelles ne payant aucune commission ni aucune rétribution pour l'acquisition des assurances et l'ayant stipulé dans leurs statuts :

6 o/o de la prime ou cotisation brute pour frais de gestion ;

1 o/o pour frais d'encaissement.

2° Autres sociétés. — Assurances en cas de décès, mixtes et à terme fixe :

3,5 o/oo du capital assuré, sur chacune des primes annuelles supposées payables pendant la durée entière de l'assurance, pour frais de gestion ;

6 o/o de chacune des primes brutes[1] pour frais d'encaissement ;

1 o/o du capital assuré pour frais d'acquisition[2].

Assurances en cas de vie :

1 o/oo du capital assuré, sur chacune des primes annuelles supposées payables pendant la durée entière de l'assurance, pour frais de gestion ;

2,5 o/o de chacune des primes brutes, pour frais d'encaissement ;

0,5 o/o de la prime unique brute pour frais d'acquisition.

[1] Les primes brutes sont celles qui contiennent tous les chargements prévus au minimum pour chaque catégorie d'assurance.

[2] Dans les cas des assurances temporaires, le chargement pour frais d'acquisition est fixé $\frac{1}{25}$ °/₀ du capital assuré, par année de durée, sans pouvoir excéder 1 °/₀. Dans les cas des assurances de rentes de survie, le chargement pour frais de gestion est de 3,5 °/₀ de la rente assurée, jusqu'au décès du survivant, et le chargement pour frais d'acquisition de $\frac{10}{25}$ °/₀ de la rente, par année de durée de l'assurance, lorsque celle-ci est temporaire, sans pouvoir excéder dans aucun cas 10 °/₀.

Rentes viagères :

4 o/o de la rente assurée pour frais de gestion ;

1 o/o de la rente assurée pour frais de payement ;

3 o/o de la prime unique brute pour frais d'acquisition.

Si les rentes viagères sont différées, les chargements sont ceux d'un capital différé dont le montant serait égal au capital constitutif de la rente à l'échéance, plus ceux correspondant aux frais de gestion et de payement de ladite rente.

Les bases applicables à des opérations procédant d'une combinaison de différentes opérations élémentaires sont déterminées par analogie.

Ces bases étaient, sauf pour les rentes viagères différées, celles qui avaient été adoptées précédemment par le Comité des Compagnies françaises d'assurances sur la vie ; la publication du décret précité n'entraîna donc que peu de modifications aux tarifs publiés antérieurement.

Nouveaux tarifs. — Le tableau de la page 198 permet de comparer l'ancien tarif Duvillard 4 o/o avec le nouveau tarif AF 3 1/2 o/o pour l'assurance vie entière. On peut y apercevoir la grande influence du changement de taux sur les primes uniques. Alors, en effet, que les primes annuelles du nouveau tarif sans participation sont inférieures d'environ 3 o/o de 25 à 40 ans aux primes annuelles du tarif ancien avec participation, et se rapprochent de ces dernières pour devenir égales à elles à l'âge de 53 ans (5,25), les primes uniques du tarif 3 1/2 o/o sans participation dépassent constamment d'environ 15 o/o celles du tarif Duvillard 4 o/o.

Participation aux bénéfices. — Comme nous l'avons dit plus haut, l'ancien système de participation aux bénéfices, malgré son irrationnalité, a été conservé, et les Compagnies ont fait paraître des tarifs avec participation de 50 o/o dans les bénéfices pour les catégories suivantes : Vie entière, à primes viagères ou temporaires, sur une ou sur deux têtes, mixtes sur une tête et sur deux têtes sans réversion, terme fixe à primes annuelles.

La Compagnie « *Le Phénix* » a adopté une combinaison d'assurance mixte avec participation, qu'elle a désignée sous le nom d'*assurance complète* et qui offre l'avantage d'être maintenue en vigueur sans surprime sur toute la surface de la terre, sauf en quelques contrées très malsaines. De plus, l'assurance reste en vigueur sans surprime même dans le cas où l'assuré prend part à une guerre contre une puissance européenne ; mais les parts de bénéfices, au lieu d'être distribuées aux assurés en fin d'exercice, sont versées au fonds de guerre pendant toute la durée du service militaire des assurés et les cinq années qui suivent leur libération définitive. Si la guerre n'a pas éclaté, ces parts sont versées aux ayants droit en même temps que le capital de l'assurance ; en cas de guerre, elles sont mises à contribution pour le payement des sinistres. Le tarif est identique à celui des mixtes avec participation.

Le chargement spécial pour la participation est de 1/9 de la prime sans participation. Ce chargement étant ainsi calculé ne dépend que de la prime elle-même, et la répartition des bénéfices en fin d'exercice devrait se faire logiquement en proportion de la prime acquittée pendant l'exercice considéré par chaque

assuré, ou, dans chaque catégorie, en proportion du capital assuré. Quelques Compagnies opèrent de cette façon; mais la plupart suivent encore les anciens errements, et répartissent les bénéfices proportionnellement aux primes, cumulées ou capitalisées, payées antérieurement à la répartition.

Les Compagnies américaines avaient imaginé un système spécial de participation, désigné sous le nom d'*accumulation*, qui a obtenu un succès considérable grâce à la somme élevée que chaque assuré recevait à la répartition. Celle-ci s'effectuait au bout de périodes assez longues, 20 ans en général, et les assurés survivants seuls y participaient. On aperçoit immédiatement la possibilité des résultats surprenants et bien propres à attirer les foules, que l'on obtenait. Les bénéfices étaient en effet capitalisés d'année en année pendant une longue période, et, de plus, une partie seulement des assurés recueillait les bénéfices réalisés sur toutes les polices. Une véritable opération tontinière était juxtaposée à l'opération en cas de décès, et tous les assurés décédés avant la fin de la période d'accumulation avaient payé une surprime pour n'en tirer aucun avantage. Mais ceux-ci avaient disparu au moment de la répartition, et les seuls résultats mis en évidence par la Compagnie étaient les parts distribuées aux survivants. On offrait à ces derniers le choix entre les six modes de règlement suivants :

Au bout de la période d'accumulation (20 ans), la police pouvait être maintenue en vigueur[1], et les bénéfices étaient soit retirés en espèces, soit convertis en

[1] La répartition se faisait ensuite tous les cinq ans.

une rente viagère ou en une assurance libérée supplémentaire, sans participation, consentie après nouvel examen médical.

Ou bien la police pouvait être résiliée, à la répartition, contre sa valeur totale qui était retirée soit en une rente viagère, soit en espèces, soit en la convertissant en une police d'assurance libérée, payable au décès, sans participation.

Ces avantages, joints aux combinaisons multiples qu'offraient les Compagnies américaines, comme la conversion du capital assuré au décès en annuités certaines ou viagères sur la tête du bénéficiaire, etc., avaient obtenu un grand succès auprès du public. Mais les polices d'accumulation renfermaient la clause suivante :

« Aucun bénéfice ne sera payé ou attribué à la police avant la fin de la période d'accumulation, et la Compagnie ne pourra être tenue, avant cette époque, de *fournir aucun renseignement sur les résultats de l'accumulation.* »

Le législateur a vu dans cette clause un danger; aussi le premier paragraphe de l'art. 7 de la loi du 17 mars 1905 est-il ainsi conçu :

« Lorsque les bénéfices revenant aux assurés ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits, un compte individuel doit mentionner chaque année la part de ces bénéfices attribuable à chacun des contrats souscrits ou exécutés en France et en Algérie, et être adressé aux assurés. »

Les contraventions à cette disposition sont poursuivies, d'après l'art. 15, devant le tribunal correctionnel, et punies d'une amende de 100 à 5000 francs, et, en cas de récidive, de 500 à 10000 francs.

Le législateur, sans interdire absolument l'accumulation, veut que cette opération, distincte de la combinaison d'assurance adoptée, donne lieu à l'établissement de comptes spéciaux et distincts des comptes de catégories; chaque assuré pourra contrôler lui-même en fin d'exercice son compte particulier, et vérifier ainsi que la surprime de participation versée chaque année est bien mise à part et réservée pour le but auquel elle est destinée.

L. — RÉSERVES

1° DÉFINITIONS

Variation des risques. — Considérons le cas d'une tête de 25 ans qui vient de souscrire un contrat vie entière au capital de 10000 francs. Elle peut se libérer d'un seul coup de tous ses engagements envers l'assureur en lui versant une prime unique, ou bien elle peut se libérer d'année en année par le versement de primes annuelles qu'il est d'usage de stipuler constantes. Laissant de côté la partie de la prime brute désignée plus haut sous le nom de chargement, et adoptant la table de mortalité AF, l'hypothèse des décès en milieu d'année et le taux de capitalisation de 3 1/2 %, nous trouverons, au moyen d'une table de

commutations, pour valeur de la prime annuelle pure constante du contrat :

$$\varpi = 10000 \frac{M_{25}}{N_{25}} = 10000 \times \frac{106.104,8}{6.886.089,3} = 154 \text{ f. } 10.$$

Mais ce contrat pourrait être remplacé par une série de contrats temporaires annuels successifs, garantissant le même capital au décès. En conservant les mêmes hypothèses, il est facile de calculer les valeurs successives des primes pures variables dont le versement devrait être exigé au début de chaque exercice, en cas de vie de l'assuré :

$$\varpi_{25} = 10000 \frac{M_{25} - M_{26}}{D_{25}} = 61,80$$

$$\varpi_{26} = 10000 \frac{M_{26} - M_{27}}{D_{26}} = 62,90$$

. . . .

$$\varpi_{30} = 10000 \frac{M_{30} - M_{31}}{D_{30}} = 68,65$$

. . . .

$$\varpi_{55} = 10000 \frac{M_{55} - M_{56}}{D_{55}} = 222 \text{ fr.}$$

. . . .

$$\varpi_{65} = 10000 \frac{M_{65} - M_{66}}{D_{65}} = 459 \text{ fr. } 55.$$

On voit que si le contractant versait, au début de chaque année, la somme exactement suffisante pour garantir à son décès, s'il survient dans l'année, le payement d'un capital de 10000 francs, cette somme,

d'abord minime, croîtrait rapidement avec l'âge et deviendrait près de huit fois plus élevée à l'âge de 65 ans qu'à l'âge de 25 ans. C'est que le taux de mortalité, base du calcul de la prime, augmente avec l'âge, le risque varie d'année en année, et c'est en cela que l'assurance sur la vie se distingue essentiellement des assurances des choses.

Le risque incendie, en effet, reste constant aussi longtemps que la chose assurée reste soumise aux mêmes influences; il est tout naturel de demander une prime annuelle constante pour couvrir un risque qui demeure toujours identique à lui-même.

Le contrat viager, au contraire, qui assure un risque variable, devrait rationnellement comporter le payement de primes variables d'année en année. L'assuré verserait alors au début de sa $n^{ième}$ année d'âge une prime ϖ_n à jamais perdue pour lui, et toutes les sommes encaissées par l'assureur au début d'un exercice serviraient à régler les sinistres survenus pendant cet exercice. Si, à la fin de celui-ci, l'assureur restait en possession d'un certain excédent, cet excédent lui serait définitivement acquis et constituerait son bénéfice.

L'inconvénient de ce système est évident. Chaque assuré se rendrait difficilement un compte exact de ses obligations, au moment de la signature du contrat. L'augmentation rapide des sommes à payer d'année en année, mal interprétée par lui, et prise pour de l'arbitraire, serait une source inépuisable de difficultés entre les parties contractantes.

Enfin les charges de l'assuré deviendraient avec l'âge de plus en plus considérables, alors que ses ressources

présentent en général un maximum à 40 ou 50 ans, et décroissent ensuite assez rapidement au fur et à mesure de l'affaiblissement de ses facultés. A un âge avancé, les primes à verser pourraient être hors de proportion avec les moyens dont il dispose, et il serait obligé d'abandonner à cet âge l'œuvre de prévoyance à laquelle il aurait vainement travaillé sa vie durant.

Aussi, l'usage s'est-il rapidement établi de demander aux assurés le payement de primes annuelles constantes; ce qui leur permet de mieux apercevoir, au début de l'assurance, l'étendue de leurs obligations. Mais ce payement crée pour l'assureur la nécessité de mettre en réserve, pour les appliquer aux exercices futurs, les portions de primes payées en trop pendant les premières années et qui doivent concourir plus tard au payement des sinistres.

Nécessité des réserves pour exercices futurs. — Reprenons l'exemple, choisi plus haut, d'un assuré de 25 ans en vie entière, versant une prime annuelle constante égale à 154 fr. 10. La première année, il lui aurait suffi, pour être garanti, d'acquitter une prime de 61 fr. 80. L'assureur reçoit donc une somme totale de 154 fr. 10, sur laquelle il doit prélever une somme de 61 fr. 80 pour subvenir aux dépenses de l'exercice courant. L'excédent, soit 92 fr. 30, sera mis en réserve pour les exercices futurs et capitalisé au taux adopté de $3 \, ^1/_2 \, ^0/_0$.

Au début de la deuxième année, l'assureur devra réserver de même, sur le montant de la deuxième prime, une somme de $154{,}10 - 62{,}90 = 91$ fr. 20,

et la somme totale qui doit être réservée par lui à cette époque et qui figure à son passif est :

$$92,30 \times 1,035 + 91,20 = 186,73.$$

Si l'assuré vit encore à 60 ans, les sommes encaissées annuellement ne suffisent plus à couvrir le risque; mais la réserve du contrat, capitalisée, représentant des trop-perçus antérieurs, vient alors parfaire la différence.

La réserve pour exercices futurs n'est donc, comme le dit M. Couteau, dans son *Traité des assurances sur la vie,* que « le solde créditeur de chaque compte produit par le mode de calcul imaginé pour établir une prime uniforme dans le contrat d'assurances en cas de décès pour la vie entière à primes annuelles ».

On voit déjà qu'il importe de ne pas prendre cette réserve pour un bénéfice acquis à la Compagnie, car elle est calculée de telle sorte que, si la loi de mortalité est exacte et si le taux d'intérêt a été convenablement choisi, elle trouvera rigoureusement son emploi plus tard. En effet, la relation qui donne la prime annuelle constante du contrat exprime, au début de l'assurance, l'égalité des valeurs actuelles des engagements de l'assureur et de l'assuré : donc les valeurs actuelles des trop-perçus des premières années et des moins-perçus ultérieurs s'équivalent. Une Société qui ne constituerait pas des réserves mathématiques suffisantes se mettrait dans le cas de ne pouvoir, à un moment donné, remplir ses engagements.

On aperçoit aussi clairement que la réserve d'un contrat pour exercices futurs, pas plus que la prime de ce contrat, ne peut, dans une entreprise d'assurance,

se concevoir isolément : la réserve d'un contrat ne peut avoir une individualité propre ; elle vient se perdre dans la réserve globale des contrats de même espèce, et ce n'est qu'en vertu de la loi des grands nombres et du principe de la division des risques que le système peut fonctionner.

La réserve agit comme ces réservoirs qui, dans les canalisations urbaines hydrauliques, sont ménagés sur le parcours de la conduite et où vient s'accumuler en temps de pluie l'eau qui sera mise en distribution à l'époque de la sécheresse, en sorte que rien ne soit changé dans le régime des fontaines et que le consommateur ne soit nullement incommodé par les variations hygrométriques. Qui oserait prétendre que de tels réservoirs ne sont pas indispensables au bon fonctionnement de la canalisation ?

Si l'on a autrefois longuement discuté sur l'opportunité d'amasser dans les caisses des entreprises des sommes aussi considérables que les réserves, la question est définitivement résolue aujourd'hui, et il est universellement admis que la nécessité de les constituer apparaît comme inéluctable.

Réserves mathématiques. — Il ressort de ce qui précède que, dans la prime payée au début d'un exercice par un nouvel assuré en cas de décès, il faut faire deux parts : l'une, réunie aux sommes de même nature, servira à régler les sinistres de l'exercice courant ; l'autre viendra alimenter la masse des réserves pour exercices futurs. L'assuré qui a ainsi payé une prime a rempli déjà une partie de ses engagements, il n'y a plus égalité entre les engagements des deux par-

ties contractantes, et l'assureur qui remplit les siens d'un seul coup à l'échéance du contrat, doit parer à cette éventualité en mettant en réserve une somme suffisante. La réserve mathématique d'un contrat en cas de décès apparaît donc à chaque instant comme une somme destinée à rétablir l'équilibre entre les valeurs respectives à cet instant des engagements de l'assureur et de l'assuré. C'est, au début d'un exercice, la somme de ce que nous avons appelé précédemment la réserve pour l'exercice courant et la réserve pour les exercices futurs. Et c'est précisément cette somme qu'il importe à l'assureur de connaître et de conserver à sa disposition, puisque sa possession lui donne la certitude de pouvoir subvenir aux dépenses de l'exercice courant et des exercices futurs et, par là même, de remplir tous ses engagements.

Les contrats en cas de vie donnent lieu de même à la constitution de réserves mathématiques : toutes les primes versées par les assurés de ces catégories doivent être réservées et capitalisées pour permettre à la Société, soit de verser aux ayants droit les capitaux assurés, soit de servir les rentes viagères aux survivants. La réserve mathématique apparaît encore ici comme un capital destiné à rétablir l'équilibre entre les engagements de l'assureur et de l'assuré, équilibre détruit par le payement des primes successives.

Une combinaison quelconque se ramenant toujours à la juxtaposition d'une assurance en cas de vie et d'une assurance en cas de décès, les conclusions précédentes subsistent entièrement, et la réserve mathématique du contrat est la somme des réserves mathématiques afférentes à ces deux opérations.

Dans les contrats souscrits à prime unique, l'assuré satisfait d'un seul coup à toutes ses obligations, et l'assureur reste tenu de réserver un capital suffisant pour lui permettre de remplir les siennes.

Donc, dans tous les cas, un contrat viager donne lieu à la constitution d'une réserve mathématique, et cette réserve, qu'il est essentiel pour l'assureur de pouvoir calculer à un moment quelconque, *est la différence, à ce moment, entre les valeurs actuelles des engagements de l'assureur et de l'assuré.*

Il est à remarquer dès maintenant que, les principes d'une bonne gestion financière imposant à l'assureur d'être toujours couvert, à partir du payement de la première prime ses engagements doivent toujours être au moins égaux à ceux de l'assuré, et ils sont en général supérieurs ; en d'autres termes, la réserve d'un contrat ne saurait, sans danger, devenir négative.

2° CALCUL DES RÉSERVES

A la fin de chaque exercice, au moment de l'inventaire, toute Société d'assurances doit calculer quelle somme totale elle est dans l'obligation de réserver pour faire face aux dépenses futures nécessitées par les contrats en cours. Bien que ce calcul ne soit pas effectué pour chacun d'eux en particulier, la nécessité ne se faisant pas sentir d'établir pour chaque assuré un compte de réserve spécial, et bien que le résultat cherché soit aussi global que possible, nous commencerons par indiquer comment on peut calculer la réserve d'un contrat donné, calcul que l'on a à effectuer dans cer-

tains cas spéciaux. (Voir : rachat, réduction, transformation des contrats page 267 et suiv.)

Méthode générale de calcul des réserves, dite prospective. — Pour obtenir la réserve d'un contrat à un moment quelconque, il suffit d'appliquer la définition qui en a été donnée plus haut :

La réserve d'un contrat d'assurances sur la vie est la différence entre les valeurs actuelles des engagements de l'assureur et de l'assuré.

Soit C le capital assuré. Négligeons d'abord le chargement et calculons la réserve en utilisant les primes pures. Soit donc $C\varpi$ la prime pure du contrat, absolument quelconque, que l'on considère, et a_g la valeur de l'annuité viagère payable dans les mêmes conditions que la prime elle-même, à partir de l'instant choisi pour le calcul de la réserve. Désignons enfin par Π la prime unique d'assurance d'un capital égal à l'unité payable dans les conditions stipulées au contrat, l'assurance étant supposée souscrite au moment même où l'on effectue le calcul. La valeur des engagements de l'assureur est $C\Pi$: cette somme est en effet la valeur actuelle du capital C payable à l'échéance de la police. L'assuré s'engage à payer une prime $C\varpi$ annuelle pendant toute la durée de vie du groupe *g* : la valeur actuelle de cet engagement est égale à $C\varpi\, a_g$, et l'expression de la réserve du contrat est donc :

$$V = C\,(\Pi - a_g\varpi). \qquad (1)$$

Ainsi la réserve au début de la deuxième année, après le payement de la deuxième prime du contrat

vie entière sur tête de 25 ans pris comme exemple plus haut, serait égale à :

$$V_2 = 10\,000\left(\frac{M_{26}}{D_{26}} - 0{,}015\,41 \times \frac{N_{27}}{D_{26}}\right) = 249 \text{ fr. } 70.$$

Cette valeur coïncide bien avec celle qui avait été trouvée page 218 :

$$92{,}30 \times 1{,}035 + 154{,}10 = 249 \text{ fr. } 70.$$

A la fin de la première année, immédiatement avant le payement de la deuxième prime, la réserve du même contrat était :

$$W_1 = 10\,000\left[\frac{M_{26}}{D_{26}} - 0{,}01541\left(1 + \frac{N_{27}}{D_{26}}\right)\right]$$
$$= 249{,}70 - 154{,}10 = 95{,}60$$

ce qui était évident à priori.

Le calcul des réserves est généralement effectué au moment de l'inventaire, et immédiatement avant, ou immédiatement après le payement d'une prime annuelle. Si la prime est payable pendant toute la durée de vie d'une tête d'âge x, les formules à appliquer sont, suivant le cas :

$$V = C\Pi - C\varpi(1 + a_x)$$

ou :

$$V_1 = C\Pi - C\varpi a_x.$$

Connaissant la prime du contrat, l'âge de l'assuré au moment de l'inventaire, la date de l'échéance et le nombre de primes à payer, le calcul de la réserve est immédiat et se réduit à des multiplications et à une soustraction, si l'on possède un barême de primes uniques Π et d'annuités viagères a_x.

Si l'on ne dispose que de barêmes de primes annuelles π :

$$\pi = \frac{\Pi}{1 + a_x}, \qquad \pi_1 = \frac{\Pi}{a_x}$$

et d'une table d'annuités a_x, on peut transformer les formules ci-dessus de la façon suivante :

$$V = C\,(\pi - \varpi)\,(1 + a_x)$$

ou :

$$V_1 = C(\pi_1 - \varpi)\,a_x.$$

Le calcul se réduit à une soustraction et une multiplication.

On voit que cette méthode est absolument générale et s'étend à tous les contrats possibles, souscrits sur un nombre de têtes absolument quelconque, pourvu que l'on connaisse la valeur de la prime qui doit être versée annuellement ; le mode particulier de détermination de cette prime n'intervient d'ailleurs pas dans le calcul, et la méthode ne tient aucun compte des circonstances passées, mais seulement des circonstances futures : elle est dite *prospective*.

En particulier, si l'assuré s'est acquitté d'un seul coup en versant une prime unique, la valeur de la réserve mathématique du contrat sera $C\Pi$, expression de la prime unique destinée à assurer les avantages stipulés à la police et supposée versée au moment du calcul de la réserve.

Le calcul des réserves se fait, dans les Compagnies d'assurances, par catégories, au moment de l'inventaire. La Compagnie doit calculer le montant des réserves à inscrire au débit du compte de chaque catégorie et à reporter au crédit du compte analogue de

l'exercice suivant. Le total de ces réserves constitue la partie la plus importante du passif.

Pour rendre ces calculs aussi rapides que possible, on a donc intérêt à grouper ensemble, autant que faire se peut, toutes les polices d'une même catégorie pour effectuer d'un seul coup le calcul correspondant.

Reprenons la formule (1)

$$V = C\Pi - a_g C\varpi.$$

Si l'on peut déterminer un groupe de polices pour lesquelles les quantités Π et a_g restent les mêmes, le total des réserves afférentes à ce groupe sera :

$$\Sigma V = \Pi\Sigma C - a_g\Sigma C\varpi = \Pi\Sigma C - a_g\Sigma p \quad (2)$$

en posant $p = C\varpi$.

Il suffira de faire la somme des capitaux assurés et la somme des primes et de les multiplier respectivement par les nombres convenables trouvés dans les barêmes de primes uniques et d'annuités viagères.

Cette opération sera possible dans le cas de rentes viagères en cours et d'assurances vie entière à primes viagères sur une seule tête. La prime unique Π et l'annuité a_g dépendent alors uniquement de l'âge des assurés : on groupera donc ensemble tous les rentiers ou tous les assurés en vie entière de même âge, et on considérera comme étant de même âge tous ceux qui sont nés entre le 1er juillet d'une année et le 30 juin de l'année suivante. Ainsi toutes les têtes nées du 1er juillet 1870 au 30 juin 1871 sont considérées comme ayant exactement 36 ans au 1er janvier 1907, époque de l'inventaire.

De plus, pour évaluer l'annuité viagère a_g, il faudra faire une hypothèse sur l'époque du payement des primes de tous ces contrats, ou sur l'époque du payement des rentes. Ces payements sont en effet effectués à des époques quelconques; mais, en général, s'il s'agit d'un groupe assez nombreux, ils sont répartis à peu près uniformément pendant la durée d'une période, et on peut admettre qu'ils sont tous effectués au milieu de la période: l'année pour les primes annuelles, le semestre ou le trimestre pour les primes et les rentes payables semestriellement ou trimestriellement.

Si la prime est annuelle, l'âge de l'assuré étant x, la valeur a_g de l'annuité à introduire dans la formule (2) serait $(1 + a_x)$ si la prime était payable immédiatement après l'époque de l'inventaire et a_x si elle venait d'être payée. On adopte généralement $\left(\frac{1}{2} + a_x\right)$ comme valeur de l'annuité payable au milieu de l'année, et la formule (2) devient:

$$\Sigma V = \Pi \Sigma C - \left(\frac{1}{2} + a_x\right) \Sigma p.$$

On partage aussi parfois tous les contrats d'un même groupe en deux classes comprenant: l'une, tous ceux dont les primes sont payables pendant le premier semestre; l'autre, tous ceux dont les primes sont payables pendant le deuxième semestre, et on suppose que les primes p_1 des premiers vont être acquittées immédiatement après l'inventaire et que celles p_2 des seconds viennent de l'être. La valeur de a_g à adopter

pour les premiers est $(1+a_x)$, et pour les deuxièmes: a_x.

$$\begin{aligned}\Sigma V &= \Pi\Sigma C - (1+a_x)\,\Sigma p_1 - a_x\Sigma p_2\\ &= \Pi\Sigma C - a_x\Sigma p - \Sigma p_1\\ &= \Pi\Sigma C - (1+a_x)\,\Sigma p + \Sigma p_2.\end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de multiplier le total des primes soit par a_x, soit par $(1+a_x)$, et, suivant le cas, de retrancher le total des primes du premier semestre ou d'ajouter celles du deuxième. En particulier, si le montant des primes du premier semestre est égal au montant des primes du deuxième, le résultat est identique à celui qui était fourni par la formule précédente :

$$\Sigma V = \Pi\Sigma C - \left(\frac{1}{2} + a_x\right)\Sigma p.$$

Si la prime est fractionnée et payable k fois par an, on remplacera a_g dans la formule (2) par $\frac{1}{2k} + {}_ka_x$, en supposant encore les primes de tous les contrats payables au milieu de chaque période et en prenant simplement la moyenne entre l'annuité fractionnée à terme échu ${}_ka_x$ et l'annuité payable d'avance $\frac{1}{k} + {}_ka_x$. Or la formule d'approximation de l'annuité fractionnée généralement admise donne :

$${}_ka_x = a_x + \frac{k-1}{2k}$$

et

$$\frac{1}{2k} + {}_ka_x = a_x + \frac{1}{2}.$$

Il suffira donc dans tous les cas de calculer la réserve du groupe en utilisant la formule :

$$\Sigma V = \Pi \Sigma C - \left(\frac{1}{2} + a_x\right) \Sigma p.$$

Les polices autres que celles de rentes viagères immédiates ou en cours, ou d'assurances en cas de décès à primes viagères, se groupent moins facilement en vue du calcul annuel des réserves. On peut cependant faire entrer dans un même groupe les polices vie entière à primes temporaires, mixtes, à terme fixe, temporaires et différées, à primes payables pendant toute la durée de l'assurance ou du différé, à la condition que toutes ces polices présentent deux éléments communs :

L'âge de l'assuré à l'époque de l'inventaire ;

La durée restante du contrat ou du différé.

Les rentes viagères immédiates sur deux têtes, les assurances vie entière sur deux têtes, les assurances de survie à primes viagères, les assurances combinées ne nécessitent également que l'existence de deux éléments communs. Mais les autres combinaisons sur une ou plusieurs têtes exigent l'existence d'un plus grand nombre d'éléments communs, et les groupements deviennent de plus en plus difficiles. Ainsi, pour grouper ensemble des polices d'assurance différée dont les primes ne sont pas payables pendant toute la durée du différé, il faudra supposer l'égalité : 1° des âges des assurés au moment de l'inventaire, 2° des nombres d'années qui doivent s'écouler avant l'expiration du différé, 3° des nombres de primes annuelles restant à payer.

Méthode rétrospective. — La méthode suivante,

dite rétrospective, est moins générale que la précédente; mais elle est parfois d'une application plus commode. Voici quel en est le principe :

La prime d'une assurance qui comporte le payement d'un capital C au décès d'un état de choses g peut se décomposer en deux parties : la première partie couvre le risque de décès pendant les k premières années, k étant d'ailleurs arbitraire; la seconde est utilisée pour satisfaire aux autres conditions stipulées dans la police, c'est-à-dire pour constituer la réserve au bout de la k^e année, si l'assuré vit à cette époque. Cette seconde partie équivaut donc à la prime d'un capital différé de k années égal à la réserve du contrat à la fin de la k^e année.

Pour appliquer la méthode, on décomposera la prime, unique ou annuelle, en deux parties, comme il vient d'être indiqué, et on écrira que la deuxième partie est la prime servant à constituer au bout de la k^e année un capital différé égal à la réserve.

Par exemple, si Π_x est la prime unique d'un contrat souscrit sur une tête d'âge x assurant un capital C au décès de cette tête, si $\Pi_x^{(k)}$ est la prime unique de l'assurance au décès, temporaire de k années, du même capital, et V_{x+k} la réserve du contrat considéré au bout de la k^e année, on aura :

$$V_{x+k} P_x^k = \Pi_x - \Pi_x^{(k)} .$$

On voit que si l'on dispose d'un barême de primes uniques d'assurances temporaires et d'un barême de capitaux différés, l'application de cette formule donnera aisément V_{x+k}, réserve demandée.

Si la combinaison considérée comportait des payements en cas de vie pendant les k premières années du contrat (rentes viagères) au lieu de comporter le payement d'un capital au décès, il serait tout aussi facile de décomposer les primes et de calculer la réserve par le même procédé.

La méthode suppose que la réserve est susceptible d'être calculée à la fin de la k^e année par l'emploi du capital différé, c'est-à-dire que, s'il s'agit d'une assurance en cas de décès d'un groupe, le vieillissement naturel intervienne seul. Ainsi la réserve d'un contrat souscrit sur deux têtes au dernier décès peut prendre trois valeurs distinctes suivant que les deux têtes sont vivantes, ou que l'une est morte au moment de l'évaluation. Mais on n'a pas à se préoccuper de cette question, car la réserve se calcule en fin d'année pour l'inventaire, et il n'y a pas lieu de la calculer à l'avance. Il suffit donc d'attendre l'époque de l'inventaire pour déterminer la valeur de la réserve, et l'on sait parfaitement alors dans quel cas on se trouve.

On voit que, par cette méthode, la réserve est calculée en fin d'année. On supposera, pour effectuer le groupement des polices, que toutes les primes payables pendant le premier semestre sont acquittées immédiatement après l'inventaire et que celles du deuxième semestre viennent de l'être. Le résultat obtenu par l'application de la méthode doit donc être augmenté de toutes les primes de polices souscrites pendant le deuxième semestre, primes supposées payables toutes ensemble en fin d'exercice.

Le groupement des polices n'est possible que si elles ont deux éléments communs : l'âge au moment de

l'inventaire et la durée courue depuis le début de l'assurance jusqu'à cette époque; en d'autres termes, ne sont susceptibles d'être groupées en vue du calcul des réserves par cette méthode que les têtes entrées au même âge.

Par contre, les engagements de l'assureur pendant les premières années du contrat sont les mêmes, qu'il s'agisse d'une mixte, d'une vie entière, d'une assurance temporaire au décès. On pourrait donc réunir pour le calcul des contrats de nature diverse; mais c'est un avantage dont on ne profite pas, puisque, d'après la loi, il faut établir les comptes de profits et pertes par catégories et par conséquent calculer les réserves par catégories.

Comme application de la méthode, prenons le cas d'une assurance mixte souscrite sur une tête d'âge x, au capital C, pour une durée de n années, et calculons sa réserve à la fin de la k^e année d'assurance. Si l'assuré a versé une prime unique :

$$\Pi_x = C \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

se libérant ainsi d'un seul coup de tous ses engagements, une partie de cette prime est destinée à lui garantir le payement du capital C s'il meurt dans le cours des k premières années :

$$C \frac{M_x - M_{x+k}}{D_x}.$$

L'autre partie est destinée à constituer la réserve au bout de la k^e année si l'assuré vit à cette époque; c'est la prime de l'assurance d'un capital différé de k années égal à la réserve V_{x+k} :

$$V_{x+k} P_x^k.$$

La méthode rétrospective conduit donc à l'égalité :

$$C\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} - C\frac{M_x - M_{x+k}}{D_x} = V_{x+k}\frac{D_{x+k}}{D_x},$$

ou :

$$V_{x+k} = C\frac{M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+k}}.$$

La méthode prospective donne évidemment le même résultat. On le constate immédiatement en remarquant que :

$$C\frac{M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+k}} = \Pi_{x+k} = V_{x+k}.$$

Une décomposition analogue sera effectuée si le contrat est souscrit à primes annuelles. Soit p la prime que l'assuré s'est engagé à payer annuellement. Une partie égale à :

$$C\frac{M_x - M_{x+k}}{N_x - N_{x+k}},$$

est destinée à assurer le risque de décès pendant les k premières années. L'autre partie, qui a pour valeur :

$$p - C\frac{M_x - M_{x+k}}{N_x - N_{x+k}},$$

sert à constituer la réserve à la fin de la k^e année en cas de vie de l'assuré ; elle équivaut à la prime annuelle d'un capital différé V_{x+k} :

$$\frac{V_{x+k}\,P^k_x}{1 + a^{(k-1)}_x} = V_{x+k}\frac{D_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}.$$

On obtient donc :

$$V_{x+k} = \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}}\left(p - C\frac{M_x - M_{x+k}}{N_x - N_{x+k}}\right)$$

$$V_{x+k} = p\,\frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} - C\,\frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}}. \qquad (1)$$

La méthode prospective aurait donné le résultat suivant :

$$V_{x+k} = C\,\frac{M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+k}} - p\,\frac{N_{x+k} - N_{x+n}}{D_{x+k}}. \qquad (2)$$

Or on sait que :

$$p = C\,\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= C\,\frac{M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n} + M_x - M_{x+k}}{N_x - N_{x+n}},$$

ou : $$C(M_{x+k} - M_{x+n} + D_{x+n}) = p(N_x - N_{x+n}) - C(M_x - M_{x+k}).$$

En substituant dans (2), il vient :

$$V_{x+k} = p\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+k}} - C\,\frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}} - p\,\frac{N_{x+k} - N_{x+n}}{D_{x+k}},$$

ou : $$V_{x+k} = p\,\frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+k}} - C\,\frac{M_x - M_{x+k}}{D_{x+k}},$$

ce qui est bien l'expression obtenue plus haut.

Il y a donc bien identité entre les résultats obtenus par les deux méthodes, quand elles sont toutes deux applicables. Le tour de raisonnement seul diffère. La méthode prospective en effet ne s'occupe que des circonstances futures, et comme le payement des primes non encore échues au moment de l'inventaire ne sera pas suffisant pour garantir à l'assuré les avantages stipulés à sa police, il faut que l'assureur ait mis en réserve une somme assez élevée pour servir de complé-

ment, somme qui doit être égale à la différence entre les valeurs actuelles des engagements pour l'avenir des deux parties contractantes. La méthode rétrospective, au contraire, considère les circonstances passées et remarque que la prime payée jusqu'à l'époque de l'inventaire a été trop élevée pour strictement garantir le risque tel qu'il était défini pour les années antérieures : l'excédent a donc dû être mis en réserve pour contribuer à faire face aux engagements de l'assureur, et c'est précisément la valeur de cet excédent au moment de l'inventaire que donne la méthode. Cette valeur n'existe réellement dans la caisse de l'assureur que si le risque n'a pas disparu : la réserve peut donc être considérée comme un capital différé.

Méthode de récurrence. — L'application au calcul des réserves de la méthode de récurrence, déjà utilisée pour le calcul des annuités viagères sur une ou plusieurs têtes, a donné d'heureux résultats. Il était tout naturel d'y avoir recours en cette circonstance : comme, à l'époque de l'inventaire, il faut, d'année en année, recommencer les mêmes calculs, on devait forcément songer à simplifier la besogne en cherchant à utiliser pour les contrats qui subsistent à la fin de chaque exercice les résultats antérieurement obtenus.

Le problème consistait donc à chercher une relation simple entre deux réserves successives du même contrat. M. Fouret l'a résolu de la façon suivante :

Désignons par V_{x+k} la réserve en fin d'exercice, à l'instant qui précède le payement d'une prime annuelle, d'un contrat, souscrit sur une tête d'âge x et qui a déjà k années de durée, par p la prime annuelle pure

du contrat, par C le capital qui doit être payé en cas de décès de l'assuré.

La réserve V_{x+k}, augmentée de la prime p qui va être acquittée, servira à payer le capital C en cas de décès de l'assuré pendant la $(k+1)^e$ année du contrat et à constituer la réserve V_{x+k+1} en fin d'exercice en cas de vie du titulaire de la police à cette époque.

La valeur actuelle, à l'époque de l'inventaire, du premier engagement de l'assureur est :

$$C\Pi^{(1)}_{x+k},$$

en désignant par $\Pi^{(1)}_{x+k}$ la prime unique, temporaire d'un an, de l'assurance au décès d'un capital égal à l'unité :

$$\Pi^{(1)}_{x+k} = q_{x+k}(1+i)^{-\frac{1}{2}},$$

et la valeur actuelle du second engagement est égale à la prime unique d'un capital différé égal à V_{x+k+1}, soit :

$$V_{x+k+1}\,P^1_{x+k}.$$

On obtient donc la relation :

$$V_{x+k} + p = C\Pi^{(1)}_{x+k} + P^1_{x+k}\quad V_{x+k+1}$$

$$= Cq_{x+k}(1+i)^{-\frac{1}{2}} + p_{x+k}(1+i)^{-1}V_{x+k+1},$$

ou :

$$V_{x-k+1} = \frac{V_{x+k} + p - C\Pi^{(1)}_{x+k}}{P^1_{x+k}} \qquad (1)$$

On peut remarquer que cette expression dépend de l'âge $(x+k)$ de l'assuré au moment de l'inventaire, et non pas de son âge à l'entrée dans l'assurance, ni du temps écoulé depuis la souscription du contrat.

Aussi, pour simplifier l'écriture, si l'on désigne par y l'âge $(x+k)$ de l'assuré, la formule (1) devient :

$$V_{y+1} = \frac{V_y + p - C\Pi_y^{(1)}}{P_y^1}. \qquad (1)$$

Si le contrat a été souscrit à prime unique dans le cours d'un exercice antérieur, p est nul, et la relation précédente s'écrit :

$$V_{y+1} = \frac{V_y - C\Pi_y^{(1)}}{P_y^1}.$$

S'il s'agit d'un capital différé ou d'une rente viagère différée, pendant la durée du différé, le capital C payable en cas de décès est nul, et la relation correspondante est : $V_{y+1} = \frac{V_y + p}{P_y^1}$

si la prime est annuelle,

ou : $V_{y+1} = \frac{V_y}{P_y^1}$

si la prime a été versée d'un seul coup.

Ces dernières relations sont d'ailleurs évidentes par un raisonnement direct, la réserve d'un exercice ne servant qu'à constituer la réserve de l'exercice suivant.

Enfin, s'il s'agit d'une rente viagère en cours de jouissance et si l'on suppose la rente annuelle, de terme r, payable immédiatement avant l'inventaire, on aura la relation : $V_y = rP_y^1 + P_y^1\, V_{y+1}$.

ou : $V_{y+1} = \frac{V_y}{P_y^1} - r.$

Si la rente est payable en k fois, il sera facile de remplacer r par la valeur des payements en cas de vie qui doivent être effectués dans l'année,

On voit donc qu'à la condition de donner à C et à p des valeurs convenables, l'expression (1) est générale et s'applique à tous les contrats.

Si l'on calculait par la méthode rétrospective la réserve d'une police, souscrite sur une tête d'âge x, à la fin de la première année, on obtiendrait, en conservant les notations ci-dessus :

$$V_{x+1} = \frac{p - C\Pi_x^{(1)}}{P_x^1},$$

relation qui est identique à celle que fournit la méthode de récurrence :

$$p = C\Pi_x^{(1)} + V_{x+1} P_x^1 .$$

De même pour une année quelconque, l'expression (1) peut s'écrire :

$$p - C\Pi_y^{(1)} = V_{y+1} P_y^1 - V_y ,$$

ce qui s'exprime : l'augmentation de la valeur actuelle, au début d'une année d'assurance, de la réserve d'un contrat est égale à la différence entre la prime réellement payée et celle qui serait suffisante pour couvrir le risque de décès pendant l'année.

Ceci montre l'identité des résultats obtenus par la méthode de récurrence et par la méthode rétrospective. Les trois méthodes étudiées jusqu'ici conduisent donc aux mêmes résultats.

On a reproché parfois à la méthode de récurrence

d'utiliser dans le calcul d'une réserve la valeur de la réserve précédente et d'accumuler ainsi les erreurs. La critique est fondée; mais, en pratique, le calcul des réserves n'exige pas une précision absolument rigoureuse, et la méthode de récurrence, d'emploi commode, donne des résultats suffisants.

Il faut remarquer, d'ailleurs, qu'elle ne peut s'employer, comme la méthode rétrospective, que lorsque la réserve peut être considérée comme un capital différé; par exemple, elle sera inapplicable lorsque la réserve pourra être soumise à une variation brusque dans le courant de l'année, comme cela peut arriver pour une combinaison sur plusieurs têtes, à capital payable au dernier décès.

Dans l'emploi de la méthode de récurrence, pour grouper les polices, on procédera comme il a été indiqué précédemment, en supposant payables au début de l'année, immédiatement après l'inventaire, les primes des contrats souscrits dans le cours du premier semestre, et à la fin de l'année, au moment même de l'inventaire, les primes des contrats souscrits dans le cours du deuxième semestre : on ajoutera donc cette dernière somme au résultat obtenu.

Un certain nombre de contrats disparaissent pendant l'année; la réserve relative à ces polices disparaît en même temps, et il faut nécessairement déduire du total des réserves au début de l'année les réserves, à cette époque, des contrats expirés. La formule (1) suppose, en effet, que la police de réserve V_y au début de l'année sera encore en cours à la fin de l'année, et la valeur de la réserve correspondante sera V_{y+1}. La mé-

thode nécessitera donc le calcul des réserves des contrats qui expirent dans l'année.

La formule (1) relative à un groupe de polices de même espèce, les assurés ayant tous le même âge au moment de l'inventaire, s'écrit :

$$\Sigma V_{y+1} = \frac{\Sigma V_y + \Sigma p - \Pi^{(1)}_y \Sigma C}{P^1_y}.$$

Les deux sommes : ΣV_y et ΣV_{y+1} s'étendent aux mêmes contrats; on a déduit, comme il vient d'être dit, la somme des réserves des polices éteintes dans l'année, de la réserve globale précédente. Σp comprend toutes les primes payées pendant le premier semestre pour les contrats non annulés pendant l'exercice; enfin, pour obtenir la réserve totale à la fin de l'exercice, il faut ajouter à ΣV_{y+1} la somme des primes reçues pendant le deuxième semestre pour les contrats encore en cours au moment de l'inventaire.

Le groupement des polices est possible lorsqu'elles présentent un seul élément commun : l'âge de l'assuré au moment de l'inventaire, ce qui rend la méthode particulièrement avantageuse. Il n'en serait plus de même si l'on faisait usage d'une table de mortalité par âge à l'entrée; la présence d'un second élément commun : l'âge à l'entrée dans l'assurance, serait alors nécessaire, puisque le taux de mortalité dépend dans ce cas de ces deux éléments.

Primes d'inventaire. — Nous avons supposé jusqu'ici que les réserves étaient calculées à la prime pure. Or nous savons qu'il faut, pour obtenir la prime

commerciale d'un contrat indiquée par le tarif, ajouter à la prime pure divers chargements répondant à des buts distincts, et dont l'étude a été faite au chapitre précédent. Ces chargements n'ont-ils pas à intervenir dans l'évaluation des réserves successives du contrat? Ne doit-on pas en conserver une partie en vue des exercices futurs?

Considérons une police comportant le payement d'une prime annuelle pendant toute sa durée. Si ϖ et ϖ'' sont les valeurs de la prime pure et de la prime commerciale du contrat, on sait que l'on a la relation (voir page 201) :

$$(1-\varepsilon)\varpi''=\varpi+\frac{F}{1+a_g}+f;$$

F représente les frais d'acquisition, f les frais de gestion annuels, ε correspond aux frais d'encaissement.

Chaque prime ϖ'' payée comporte le payement de frais d'encaissement égaux à $\varpi''\varepsilon$; il n'entre en réalité dans la caisse de la Compagnie que la somme :

$$(1-\varepsilon)\varpi'',$$

et tout revient à supposer que cette somme est la prime réellement payée par l'assuré à la Compagnie.

Sur chacun des payements annuels de l'assuré, la Compagnie peut prélever, au début de l'exercice, une somme f destinée à couvrir les frais de gestion afférents au contrat et une somme $\frac{F}{1+a_g}$ servant à amortir les frais d'acquisition déboursés au début. Ces prélèvements effectués, il reste la prime pure, qui suffit à couvrir le risque de l'année en cours et à accroître,

comme il convient, la réserve en fin d'exercice. Il semble donc qu'il n'y ait pas à tenir compte des divers chargements dans l'évaluation de la réserve, et les formules établies plus haut à la prime pure paraissent suffisantes.

Mais ces prélèvements deviennent impossibles lorsqu'aucune prime n'est payée au début de l'exercice, ce qui est le cas pour une police libérée au moyen d'un payement unique ou pour un contrat souscrit à primes annuelles payables pendant une fraction seulement de sa durée. La prime unique d'un contrat est en effet donnée par la relation :

$$(1-\varepsilon)\,\Pi'' = \Pi + F + f(1+a_g),$$

et si l'on peut faire abstraction des frais d'encaissement et des frais d'acquisition dans le calcul de la réserve, puisque ces frais sont payés une fois pour toutes, lors du versement de la prime unique, il faudra prévoir une réserve pour frais de gestion aussi longtemps que le contrat sera en cours. De même si la prime est annuelle, mais non payable pendant la durée totale de la police :

$$(1-\varepsilon)\varpi'' = \varpi + \frac{F}{1+a_\gamma} + \frac{f(1+a_g)}{1+a_\gamma},$$

il faut prévoir l'amortissement des frais d'acquisition et, de plus, réserver d'année en année des sommes suffisantes pour faire face aux frais de gestion pendant le cours des années où la Compagnie n'encaissera pas de primes.

Il est rationnel d'admettre que la commission escomptée F, dépense faite au début de l'assurance, doit être couverte par une série de versements viagers suc-

cessifs égaux à $\frac{F}{1 + a_\gamma}$; on peut ainsi comparer cette dépense à un achat d'usufruit; mais, en somme, cet usufruit présente un caractère aléatoire étranger aux chances de survie du titulaire de la police et provenant de ce que le contractant peut toujours, à un moment quelconque, par le seul fait de la cessation du payement des primes, abandonner ou résilier son contrat. Il est vrai que, dans ce cas, l'assureur ayant entre ses mains la réserve, quantité qui ne doit jamais être négative, peut, lorsqu'il y a rachat ou réduction, prélever sur cette réserve une indemnité de résiliation.

Quoi qu'il en soit, les Compagnies préfèrent ou bien porter annuellement toutes les commissions payées à un compte spécial en les considérant comme des frais inhérents à l'exercice même où elles sont versées, ou bien les amortir en un très petit nombre d'années, en un compte de commissions escomptées. Le procédé est d'ailleurs d'une bonne gestion; car la Compagnie, amortissant très rapidement ses commissions, se ménage ainsi, par le recouvrement du chargement pour frais d'acquisition contenu dans chaque prime encaissée, une source nouvelle de bénéfices qu'elle pourra utilement employer à la création d'une réserve de prévoyance.

En tous cas, ce principe d'amortissement rapide des commissions étant admis, il n'y a pas à tenir compte des frais d'acquisition dans le calcul de la réserve d'un contrat quelconque.

Les frais d'encaissement n'ont jamais, comme nous l'avons fait remarquer plus haut, à intervenir dans le calcul des réserves; ils sont prélevés sur la prime

commerciale au moment même du payement de celle-ci, si l'on considère que la prime réelle du contrat est la somme $(1 - \varepsilon)\varpi''$.

Le seul chargement dont il y ait lieu de se préoccuper dans le calcul des réserves est donc celui qui a pour but de faire face aux frais de gestion annuels, lorsque le contrat ne comporte pas le payement d'une prime annuelle pendant toute sa durée. Aussi les Compagnies françaises calculent leurs réserves au moyen de *primes d'inventaire* uniques ou annuelles dont la valeur est :

$$\Pi' = \Pi + f(1 + a_y),$$

$$\varpi' = \varpi + f\,\frac{1 + a_y}{1 + a_\gamma}\,.$$

Ces primes comprennent la prime pure et une partie destinée à couvrir les frais de gestion, ou, si l'on préfère, ce sont les primes commerciales dépouillées des frais d'encaissement et des frais d'acquisition.

Calcul des réserves au moyen des primes d'inventaire. — L'application des primes d'inventaire au calcul des réserves se fait aisément. On sait que, dans la méthode prospective, on considère la réserve comme la différence entre les valeurs actuelles, au moment de l'inventaire, des engagements de l'assureur et de l'assuré. Prenons un contrat souscrit sur une tête d'âge x à la prime annuelle pure ϖ, et calculons sa réserve au bout de k années. L'assureur doit payer le capital assuré C à l'échéance du contrat; il doit en outre faire face aux frais de gestion annuels égaux

à f jusqu'à cette époque. La valeur actuelle de ses engagements est donc :

$$\Pi_{x+k} + f(1 + a_{x+k}) = \Pi'_{x+k}.$$

Les engagements de l'assuré consistent dans le payement de la prime d'inventaire jusqu'à l'époque fixée. Supposons que le contrat comporte au maximum le payement de n primes annuelles ($k < n$), on aura pour valeur actuelle des engagements de l'assuré :

$$\varpi'\left(1 + a_{x+k}^{(n-k-1)}\right),$$

en supposant la prime payable immédiatement après l'inventaire. La réserve devra donc être égale à

$$V'_{x+k} = \Pi'_{x+k} - \varpi'\left(1 + a_{x+k}^{(n-k-1)}\right).$$

D'une façon générale, s'il s'agit d'un groupe dont l'âge puisse être représenté par g au moment de la souscription du contrat et par $(g + k)$ au moment de l'inventaire, tandis que le payement des primes est lié à un état de choses γ, on a :

$$V'_{g+k} = \Pi'_{g+k} - \varpi'(1 + a_{\gamma+k}).$$

En particulier, si $\gamma = g$, la réserve calculée à la prime d'inventaire est égale à celle qui serait calculée à la prime pure, car :

$$\Pi'_{g+k} = \Pi_{g+k} + f(1 + a_{g+k}) \qquad \varpi' = \varpi + f,$$

$$V'_{g+k} = \Pi_{g+k} + f(1 + a_{g+k}) - (\varpi + f)(1 + a_{g+k}$$

$$= \Pi_{g+k} - \varpi(1 + a_{g+k}) = V_{g+k}.$$

On devait s'y attendre; car, dans ce cas, la prime étant payable pendant toute la durée du contrat, on peut prélever chaque année, au moment du payement

de la prime, une somme destinée à subvenir aux frais de gestion qu'il n'y a pas lieu alors de faire intervenir dans le calcul de la réserve.

Pour l'application de la méthode rétrospective, un raisonnement analogue au précédent conduit à un semblable résultat. Distinguons dans la prime d'inventaire ϖ' une partie $\varpi'^{(k)}$ destinée à couvrir, pendant les k premières années du contrat, le risque dont la réalisation comporte le payement d'un capital aux ayants droit et les frais de gestion, et une seconde partie destinée à satisfaire aux autres conditions de la police, c'est-à-dire à constituer la réserve au bout de la k^e année si le contrat est en cours à cette époque. Cette seconde partie de la prime $[\varpi' - \varpi'^{(k)}]$ peut être considérée comme un versement annuel servant uniquement à la constitution de la réserve V'_{g+k} si le contrat est en cours à cette époque. C'est la prime annuelle pure d'un capital différé V'_{g+k} :

$$V'_{g+k} = \frac{[\varpi' - \varpi'^{(k)}]\left[1 + a_g^{(k-1)}\right]}{P_g^k}.$$

La méthode rétrospective et la méthode prospective s'appliquent donc comme nous l'avons indiqué précédemment, à la seule condition de substituer les primes d'inventaire aux primes pures dans le calcul.

Pour appliquer la méthode de récurrence, supposons la prime d'inventaire ϖ' payable au début de l'exercice. La réserve V'_y à la fin de l'exercice précédent, augmentée de ϖ', doit suffire à régler le capital assuré en cas de réalisation du risque pendant la $(k+1)^e$ année du contrat, à constituer la réserve V'_{y+1} en fin d'exercice si le contrat subsiste à cette époque, et enfin à

payer les frais de gestion de l'année. Si ces derniers sont supposés, comme la prime, payables au début de l'exercice, ou mis en réserve au moment même du versement de la prime, on aura :

$$V'_y + \varpi' = f + C\Pi_y^{(1)} + P_y^1 V'_{y+1},$$

$$V'_{y+1} = \frac{\varpi' + V'_y - f - C\Pi_y^{(1)}}{P_y^1}.$$

La formule de récurrence trouvée plus haut s'applique, à la condition de substituer la prime d'inventaire à la prime pure, s'il y a lieu, et de retrancher les frais de gestion du numérateur de l'expression V_{y+1}.

Réserves calculées à la prime du tarif. — Autrefois, lorsque l'on utilisait les tarifs à la prime pure, on ne pouvait mettre en évidence le chargement, et on était obligé de calculer les réserves au moyen des primes du tarif. Supposons qu'il en soit ainsi pour un tarif chargé rationnellement; la méthode prospective nous donnera :

$$V''_{g+k} = \Pi''_{g+k} - \varpi''(1 + a_{\gamma+k}).$$

Les engagements de l'assureur sont représentés par Π''_{g+k}, mais dans cette prime commerciale sont compris les frais d'encaissement et les frais d'acquisition qui ne doivent pas venir grever une police en cours. La commission est en effet versée au début de la police et ne peut l'être une seconde fois pendant le cours du contrat. D'autre part, les engagements de l'assuré sont représentés par $\varpi''(1 + a_{\gamma+k})$, mais dans ϖ'' sont com-

pris les frais d'encaissement $\varepsilon\varpi''$, qui n'ont pas à intervenir, et la portion de la prime destinée à amortir les frais d'acquisition, qui disparaissent au bout de trois ou quatre ans du compte de commissions escomptées, ou sont considérés comme des frais généraux d'un seul exercice :

$$\Pi'' = \frac{\Pi' + F}{1 - \varepsilon}, \qquad \varpi'' = \frac{\varpi' + \dfrac{F}{1 + a_\gamma}}{1 - \varepsilon}.$$

La réserve V''_{g+k} s'écrit donc, en fonction de la réserve calculée au moyen des primes d'inventaire :

$$V''_{g+k} = \frac{\Pi'_{g+k} + F}{1 - \varepsilon} - \frac{\varpi' + \dfrac{F}{1 + a_\gamma}}{1 - \varepsilon}\left(1 + a_{\gamma+k}\right)$$

$$= \frac{V'_{g+k}}{1 - \varepsilon} + \frac{F}{1 - \varepsilon}\left(1 - \frac{1 + a_{\gamma+k}}{1 + a_\gamma}\right)$$

$$= \frac{V'_{g+k}}{1 - \varepsilon} + \frac{F}{1 - \varepsilon}\,\frac{a_\gamma - a_{\gamma+k}}{1 + a_\gamma}.$$

La réserve V''_{g+k} est donc trop forte de la quantité :

$$V''_{g+k} - V'_{g+k} = \frac{V'_{g+k}\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \frac{F}{1 - \varepsilon}\,\frac{a_\gamma - a_{\gamma+k}}{1 + a_\gamma}$$

toujours positive, car $a_\gamma > a_{\gamma+k}$.

Si le calcul de la réserve V''_{g+k} est effectué à l'aide des primes du tarif Duvillard, les engagements de l'assureur seront, ainsi qu'on le sait, exagérés; de plus, aux âges moyens, la table étant trop rapide,

la valeur de l'annuité viagère est trop faible ; pour ces deux raisons, la réserve est chargée, mais le chargement diminue au fur et à mesure que l'âge augmente, puisque la mortalité de la table est trop lente à la fin de la vie humaine, et les réserves peuvent même devenir insuffisantes.

Réserves des contrats avec participation. — Les Compagnies ont l'habitude de majorer de 1/9 comme les primes, les réserves des contrats avec participation, calculées au moyen des primes d'inventaire comme s'il s'agissait de contrats sans participation. La réserve W'_{g+k} d'un tel contrat après k années de durée est donc :

$$W'_{g+k} = \frac{10}{9} V'_{g+k} = \frac{10}{9} \Pi'_{g,+k} - \frac{10}{9} \varpi' (1 + a_{\gamma+k}).$$

Les primes d'inventaire sont supposées majorées dans le même rapport que les primes commerciales ; ce qui revient à supposer que tous les chargements sont majorés dans la même proportion, hypothèse en somme admissible, et qui serait absolument exacte si les chargements étaient proportionnels à la prime.

3° JEU DES RÉSERVES.

Nous avons fait remarquer plus haut (page 220) que les réserves des divers contrats ne sauraient être considérées individuellement, mais que leur ensemble agit comme un réservoir dans une canalisation hydraulique et que, dans le bloc des réserves, la partie afférente à chaque contrat perd toute individualité. Nous avons indiqué comment on calcule les réserves glo-

bales par catégories, ainsi que l'exige la loi, et il nous reste à montrer la rationnalité et la nécessité du système par l'étude de son fonctionnement.

Considérons un contrat qui comporte le payement d'un capital C en cas de décès de l'assuré. Deux réserves successives, calculées au moment qui précède le payement d'une prime annuelle ϖ, sont liées par la relation :

$$V_y + \varpi = C\Pi_y^{(1)} + V_{y+1} P_y^1$$

ou : $$V_y + \varpi = Cq_y (1+i)^{-\frac{1}{2}} + V_{y+1} p_y (1+i)^{-1},$$

en supposant les réserves calculées à la prime pure, ce qui n'a pas d'inconvénient au point de vue du mode de fonctionnement du système étudié.

S'il y a en cours v_y contrats identiques, garantissant le même capital au décès, et souscrits sur des têtes de même âge y, la réserve totale de ce groupe de contrats au début de l'exercice sera égale à :

$$v_y (V_y + \varpi) = Cd_y (1+i)^{-\frac{1}{2}} + v_{y+1} V_{y+1} (1+i)^{-1}. \quad (1)$$

Elle se divise en deux parties : l'une $Cd_y (1+i)^{-\frac{1}{2}}$ est destinée à couvrir les risques de l'exercice courant, l'autre $v_{y+1} V_{y+1} (1+i)^{-1}$ servira à constituer la réserve en fin d'exercice. Si l'on adopte l'hypothèse des décès simultanés au milieu de l'année et si l'on suppose la mortalité réelle des assurés exactement exprimée par la table, le nombre des décès qui se produiront sur les v_y têtes du début de l'année sera d_y, et la somme $Cd_y (1+i)^{-\frac{1}{2}}$ devenue par capitalisation Cd_y

sera bien exactement suffisante pour payer le capital C au milieu de l'année aux d_y assurés décédés. L'hypothèse des décès simultanés au milieu de l'exercice est plausible lorsque le groupe considéré comprend un nombre de têtes suffisant, la répartition des décès dans le cours de l'année étant sensiblement uniforme. On peut donc admettre, à cette condition, que l'expression : $Cd_y(1+i)^{-\frac{1}{2}}$ représente exactement au début de l'exercice la somme suffisant au payement des sinistres de cet exercice.

La seconde partie de l'expression (1) :

$$v_{y+1}V_{y+1}(1+i)^{-1}$$

devient par capitalisation égale à : $v_{y+1}V_{y+1}$ à la fin de l'année : elle est donc exactement égale à cette époque à la somme des réserves des v_{y+1} contrats qui, d'après l'hypothèse faite sur la mortalité, seront encore en cours.

Au lieu de considérer un groupe de contrats identiques, on peut ne considérer qu'un seul contrat :

$$V_y + \varpi = C\Pi_y^{(1)} + V_{y+1}P_y^1.$$

La quantité $C\Pi_y^{(1)}$ décroît pendant l'année et s'annule à la fin ; $V_{y+1}P_y^1$ croît et acquiert pour valeur finale V_{y+1}. M. Poterin du Motel a représenté graphiquement cette variation de la façon suivante[1].

Sur une droite horizontale prise pour axe des abscisses[2],

[1] P. du Motel, **2**, page 318.
[2] Voir la figure page 254.

figurons les points A et B qui représentent les âges consécutifs y et $(y+1)$ et portons sur les ordonnées de ces points les longueurs AC, CD, BE qui représentent respectivement $C\Pi_y^{(1)}$, $V_{y+1}P_y^1$ et V_{y+1}. On peut admettre que la droite CB représente du commencement à la fin de l'exercice la variation de la réserve pour l'exercice courant, qui passe de la valeur $C\Pi_y^{(1)}$ à la valeur zéro. La variation des ordonnées comprises entre les droites CB et DE représentera la variation de la réserve pour exercices futurs, réserve qui varie de $V_{y+1}P_y^1$ à V_{y+1}. Si l'on prolonge ED et BC jusqu'en M, on voit que:

$$\frac{MC}{MB}=\frac{CD}{EB}=P_y^1.$$

Si l'on considère un autre contrat souscrit au même capital que le précédent sur une tête présentant le même risque de décès :

$$W_y+\varpi_1=C\Pi_y^{(1)}+W_{y+1}P_y^1,$$

la droite BC représentera encore la variation de la réserve de ce nouveau contrat pour l'exercice courant, et la droite E'D' qui représentera la variation de la réserve pour exercices futurs sera telle que l'on ait:

$$\frac{MC}{MB}=\frac{CD'}{E'B}=P_y^1.$$

Ceci montre que le point M est un point fixe pour tous les contrats comportant le même risque pour l'exercice considéré.

En particulier si l'on considère la droite MNP parallèle à AB, cette droite correspond à un contrat pour lequel les réserves au début et à la fin de l'exercice sont égales : $\varpi + V_y = V_{y+1} = \frac{C\Pi_y^{(1)}}{1 - P_y^1}$.

La droite MNP sépare les droites représentatives des contrats à réserve croissante et des contrats à réserve décroissante.

M. Poterin du Motel considère la droite $M\delta\varepsilon$ telle que : $B\varepsilon = A\delta(1+i)$. Elle correspond à un contrat dont la réserve s'accroît simplement de ses intérêts du commencement à la fin de l'année : le risque de décès et le risque de vie se balancent exactement, la police devient neutre comme un terme fixe dont toutes les primes sont payées. On a alors :

$$(1+i)(V_y + \varpi) = V_{y+1}$$
$$= (1+i)\left[Cq_y(1+i)^{-\frac{1}{2}} + V_{y+1}p_y(1+i)^{-1}\right],$$

en adoptant l'hypothèse du décès de l'assuré au milieu de l'année, c'est-à-dire :

$$V_y + \varpi = C(1+i)^{-\frac{1}{2}}$$
$$V_{y+1} = C(1+i)^{\frac{1}{2}}.$$

La réserve au début de l'année est exactement égale à la valeur actuelle du payement à faire au milieu de l'année si le décès se produit. Elle se capitalise simplement au taux i si le décès n'a pas lieu.

Pour les assurances où le risque de décès domine, l'éventualité la plus fâcheuse étant le décès de l'assuré,

la partie la plus importante de la réserve au début de l'année est celle qui correspond au risque de l'exercice courant. La réserve s'accroît donc moins vite que si elle se capitalisait purement et simplement pendant l'exercice, ce qui arriverait si les deux risques vie et décès se balançaient exactement. On a donc :

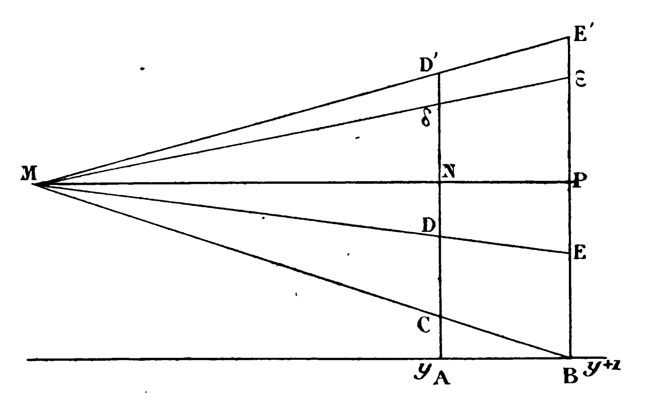
$$V_{y+1} < (1+i)(V_y + \varpi),$$

ou : $$\frac{V_y + \varpi - Cq_y(1+i)^{-\frac{1}{2}}}{p_y(1+i)^{-1}} < (1+i)(V_y + \varpi),$$

$$V_y + \varpi < C(1+i)^{-\frac{1}{2}},$$

$$V_{y+1} < C(1+i)^{\frac{1}{2}}.$$

La droite représentative MDE d'un contrat où le cas de décès domine se trouvera donc au-dessous de M$\delta\varepsilon$.



Pour les polices qui comportent en cas de vie des payements plus considérables qu'en cas de décès, c'est l'inverse : droite MD'E'. La ligne M$\delta\varepsilon$ est donc la

ligne de démarcation entre les assurances en cas de vie et en cas de décès.

Le graphique de la page 254 représente donc la variation annuelle de la réserve d'un contrat quelconque qui comporte en cas de décès de l'assuré dans l'année le payement d'un capital C.

La représentation graphique de la réserve d'un contrat de rente viagère en cours de jouissance serait analogue, à cela près que les payements en cas de décès dans l'année sont remplacés par des payements en cas de vie. La réserve pour exercice courant est égale à la valeur actuelle des arrérages qui seront versés dans l'année au rentier, s'il est vivant aux échéances. Dans un tel contrat, les réserves successives vont évidemment en diminuant, dès que le service de la rente a commencé, et la réserve s'annule lorsque le rentier meurt.

S'il s'agit d'une assurance de capital différé simple, il n'y a plus de payement à prévoir en cas de décès, et la réserve se capitalise viagèrement d'année en année :

$$V_y + \varpi = V_{y+1} P^1_y .$$

La réserve augmente constamment jusqu'au jour de l'échéance du contrat, si l'assuré vit à cette époque : elle devient alors égale au capital à verser.

Un cas particulier intéressant se produit lorsque la droite représentative de la réserve MDE coupe l'axe AB. La réserve devient alors négative, le risque de décès dans l'année n'est plus couvert, l'assuré devient débiteur de l'assureur dans le courant de l'année, alors qu'il doit s'écouler encore un certain temps avant le payement de la prime. Cette créance de l'assureur

sur l'assuré présente un caractère fort aléatoire, puisque par le seul fait du non payement des primes le contrat tombe de lui-même. L'assureur a donc avancé un capital qui ne lui sera peut-être pas remboursé.

On a dans ce cas :

$$V_y + \varpi < C\Pi_y^{(1)} \qquad V_{y+1} < 0.$$

Généralement le risque assuré est croissant, les primes des premières années sont exagérées, et l'excédent est mis en réserve pour les exercices ultérieurs ; mais le risque peut être décroissant, et si le contrat est à primes constantes, les primes des premières années sont insuffisantes pour couvrir le risque : la réserve est négative. Il ne faut donc pas assurer un risque décroissant d'année en année au moyen d'une prime constante. La prime doit être décroissante comme le risque.

Même lorsqu'il s'agit d'un risque croissant, la réserve d'un contrat souscrit à primes annuelles constantes peut devenir négative, si l'on tient compte de la commission, qui est généralement escomptée. La commission est payée à l'agent au moment où l'assuré verse la première prime. Elle peut absorber une partie de cette prime telle que le risque de l'année ne soit plus suffisamment couvert. Et comme rien n'empêche l'assuré d'abandonner son contrat au bout de la première année, la Compagnie se trouve dans ce cas avoir assuré un risque contre lequel elle n'était pas couverte. Ce danger est surtout réel pour les primes d'assurances temporaires de faible durée. La prime perçue est très peu exagérée, et la réserve des premières années est très faible. Aussi est-il bon, pour ces combinaisons,

de ne pas escompter la commission et de la verser annuellement pendant toute la durée du contrat.

Dans une Compagnie en plein fonctionnement, dont les opérations suivent une marche normale, le bloc des réserves s'accroît chaque année des primes versées; il est capitalisé au taux adopté pendant l'année, et il fournit les sommes nécessaires au payement des sinistres. Si les affaires augmentent, les réserves s'accroissent; si elles diminuent, les réserves s'épuisent progressivement pour disparaître complètement lorsque la Compagnie a cessé ses opérations et rempli tous ses engagements.

Considérons en effet une Compagnie qui entreprend une nouvelle catégorie d'opérations. Il entre la première année v_x assurés d'âge x payant chacun une prime annuelle ϖ pour assurer un capital C :

$$v_x\varpi = Cd_x(1+i)^{-\frac{1}{2}} + v_{x+1}V_{x+1}(1+i)^{-1}.$$

A la fin de l'année, la réserve de ce groupe sera égale à $v_{x+1}V_{x+1}$, et, si le groupe est supposé régulièrement alimenté, il entrera la deuxième année v_x nouveaux assurés d'âge x qui verseront eux aussi chacun une prime ϖ correspondant au capital C. La réserve sera donc au commencement de la deuxième année :

$$v_x\varpi + v_{x+1}V_{x+1} + v_{x+1}\varpi,$$

et à la fin de cette même année :

$$v_{x+1}V_{x+1} + v_{x+2}V_{x+2}.$$

Si l'on suppose la mortalité conforme à celle de la table et la production de la Compagnie constante, la réserve du groupe constitué par les assurés entrés au

même âge x et payant une même prime annuelle ϖ sera devenue au bout de p années :

$$v_{x+1}V_{x+1} + v_{x+2}V_{x+2} + v_{x+3}V_{x+3} + \dots + v_{x+p}V_{x+p} = W.$$

Si $x+p$ est l'âge extrême de la table, ou l'âge où les contrats prennent fin, et s'il continue à entrer le même nombre de têtes v_x à l'âge x dans cette catégorie, la réserve demeure constante d'année en année et égale à W. Si, à un moment donné, il n'entre plus de têtes à l'âge x, le groupe n'étant plus alimenté, ses réserves successives deviennent égales à :

$$v_{x+2}V_{x+2} + \dots + v_{x+p}V_{x+p},$$
$$v_{x+3}V_{x+3} + \dots + v_{x+p}V_{x+p},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$v_{x+p}V_{x+p},$$
$$0.$$

Au bout de p années la Compagnie a rempli tous ses engagements, puisque tous ses assurés sont morts, et la réserve disparaît.

On peut répéter ce raisonnement pour tous les groupes d'assurés entrés à un même âge et payant une même prime ; en rassemblant les résultats, on peut donc dire que la réserve globale d'une Compagnie augmente quand la Compagnie augmente son portefeuille, qu'elle reste stationnaire quand la production est constante d'année en année, enfin qu'elle trouve son emploi intégral dans le payement des sinistres lorsque la Compagnie, ayant cessé ses affaires, liquide la situation et achève de remplir ses engagements.

Ceci suppose que la mortalité réelle soit exactement

conforme à celle de la table employée et que le taux de capitalisation adopté soit, en pratique, obtenu. Si la mortalité réelle est plus forte que celle de la table employée, la Compagnie sera en perte sur les catégories d'assurances en cas de décès, puisque la somme des capitaux à payer annuellement pour sinistres sera supérieure à celle qui était prévue; elle sera au contraire en gain sur les catégories d'assurances en cas de vie. Et inversement.

Si le taux de capitalisation choisi est supérieur à celui que l'on peut obtenir réellement, la Compagnie sera en perte, et d'autant plus que la masse des réserves sera plus grande. Elle aura avantage à ne pas développer son portefeuille du côté des assurances à forte réserve, les pertes pourraient devenir considérables. Si la baisse du taux de l'intérêt s'accentue, il sera bon de ne pas hésiter à diminuer le taux de capitalisation et à demander aux assurés, dans leur propre intérêt, des primes plus fortes. Il faut toujours, au moment du changement de taux, adopter un taux légèrement inférieur à celui que l'on peut obtenir, de façon à pouvoir le conserver un certain temps et à éviter des augmentations de primes trop fréquentes qui découragent les assurés. En ces circonstances, l'avantage appartient aux Compagnies puissantes, qui ont constitué de longue date des réserves de prévoyance, des réserves pour fluctuations de valeurs, qui leur permettent de ne pas ressentir aussi vivement que les autres les conséquences d'une baisse brusque du taux de l'intérêt et de maintenir plus longtemps leurs tarifs anciens en garantissant à leurs assurés la constance de la prime, pendant toute la durée des combinaisons

qu'ils ont adoptées, malgré les changements apportés aux tarifs.

Nous ne nous sommes occupés que des contrats reposant sur une seule tête. Or on sait que les formules et raisonnements faits dans ce cas s'appliquent sans y rien changer au cas des contrats souscrits sur un groupe de plusieurs têtes, quand ce groupe est considéré comme s'éteignant au premier décès. On a montré d'autre part que les contrats souscrits sur plusieurs têtes, avec réversion de capitaux ou de rentes, pouvaient être décomposés en plusieurs autres, souscrits sur des têtes isolées ou sur des groupes s'éteignant au premier décès. Les primes de ces combinaisons peuvent donc être considérées comme la somme ou la différence de plusieurs primes, et par suite les valeurs de leurs réserves seront données par des expressions similaires où entreront les réserves de plusieurs autres contrats souscrits sur des têtes isolées ou des groupes sans réversion. Les conclusions précédentes s'appliquent à chacun de ces contrats composants; elles s'appliquent donc en toute rigueur au contrat proposé, c'est-à-dire que les portions de primes qui n'ont pas servi à régler les sinistres de l'année sont mises en réserve et capitalisées pour constituer les réserves pour exercices ultérieurs. Dans un groupe de polices de ce genre, comme dans tout autre groupe, la réserve globale s'accroît quand la production augmente, quand le portefeuille de la Compagnie se développe; un équilibre s'établit quand la production devient constante et lorsque l'état de régime est atteint, c'est-à-dire quand il y a des assurés de tous les âges; enfin la réserve diminue quand la production s'amoin-

drit, pour trouver son emploi intégral le jour où la Compagnie, ayant cessé son industrie, achève de remplir ses engagements.

On pourrait croire qu'il n'en est pas ainsi si, au lieu de considérer la masse des réserves des polices souscrites avec réversion, on n'en considérait qu'une en particulier. La réserve, en effet, d'une telle police, à l'encontre des réserves de contrats souscrits sur une seule tête qui subissent une variation annuelle normale représentée graphiquement page 254, est soumise, au moment de la mort d'un des assurés, à une variation brusque qui pourrait être prise pour une perte ou un bénéfice de la Compagnie, alors que ce n'est qu'une variation nécessaire, qui doit être prévue, et dont l'effet vient s'amortir contre la masse des réserves dont elle n'est qu'un élément constitutif.

Ainsi, si l'on désigne par $V_{\overline{xy}}$ la réserve en fin d'année d'une combinaison reposant sur un groupe qui s'éteint au dernier décès, composé de deux têtes d'âges (x, y) vivantes à cette époque, la réserve à la fin de l'année suivante pourra avoir l'une des quatre valeurs suivantes :

1° Elle sera $V_{\overline{x+1, y+1}}$ si aucune des deux têtes ne meurt pendant l'année. La variation de la réserve aura été normale, et la formule de récurrence établie plus haut relie les deux réserves successives.

2° Elle sera V_{x+1} si la tête y est morte dans l'année.

3° Elle sera V_{y+1} si la tête x est morte dans l'année.

4° Elle sera nulle si les deux têtes sont décédées.

Les différences

$$\left(V_{x+1} - V_{\overline{x+1, y+1}}\right) \quad \text{ou} \quad \left(V_{y+1} - V_{\overline{x+1, y+1}}\right)$$

peuvent être positives ou négatives; elles représentent des variations brusques des réserves, mais ce ne sont, comme on vient de le dire, ni des bénéfices ni des pertes pour la Compagnie.

Dans tous les cas, la réserve d'un tel contrat, pas plus que les réserves étudiées précédemment, ne doit jamais devenir négative; cela prouverait uniquement que la prime du contrat a été mal calculée, puisque, à un moment donné, l'assureur n'est plus couvert; or il doit, au moment de la conclusion du contrat, conduire son calcul de telle sorte que l'assuré soit toujours son créancier, et prévoir toutes les circonstances qui peuvent se produire. C'est un raisonnement analogue qui nous a permis de montrer qu'un contrat assurant un capital différé sur deux têtes avec réversion ne doit pas être souscrit à prime annuelle constante (page 138).

4° RÈGLES IMPOSÉES PAR LA LOI POUR LE CALCUL DES RÉSERVES MATHÉMATIQUES

La loi du 17 mars 1905 a pris le soin, en son article 6, de définir les réserves mathématiques qui doivent être égales, dit-elle, « à la différence entre les valeurs des engagements respectivement pris par elles et par les assurés. » Les entreprises étrangères, comme les entreprises françaises, sont tenues de constituer ces réserves pour les contrats souscrits ou exécutés en

France et aux colonies françaises. Les contraventions à cette disposition de la loi, constatées par les procès-verbaux des commissaires-contrôleurs, sont poursuivies devant le tribunal correctionnel, à la requête du ministère public, et punies d'une amende de 100 à 5000 francs, et, en cas de récidive, de 500 à 10000 francs.

Aux termes de l'article 1er du décret du 20 janvier 1906 rendu en application du 5e alinéa de l'article 9 de la loi, les réserves mathématiques doivent être calculées d'après les mêmes bases que les primes, bases qui ont été indiquées pages 209 et suivantes (taux d'intérêt 3 1/2 %, tables AF, RF ou CR suivant le cas, etc.). Elles ne peuvent être inférieures à celles qui seraient obtenues au moyen de primes d'inventaire « égales aux primes brutes dépouillées de la portion du chargement destinée à couvrir les frais d'encaissement et les frais d'acquisition » (art. 3 du décret). Ce sont les primes d'inventaire telles que nous les avons définies plus haut. On doit tenir compte, dans le calcul des réserves mathématiques, de l'échéance et du fractionnement des primes et, en ce qui concerne les rentes viagères immédiates, de l'échéance des arrérages. Ces termes doivent être entendus dans un sens assez large, et on peut, sans nul doute, considérer comme tombant à la même échéance les primes, payables annuellement, de contrats souscrits pendant un semestre; sinon tout groupement de polices deviendrait impossible, et il faudrait se résigner à calculer individuellement les réserves. Il n'y a d'ailleurs aucune nécessité à effectuer ce calcul d'une façon absolument précise; le jeu des réserves, en raison des facteurs et des coefficients qui inter-

viennent et qui ne sont que probables, n'exige pas un tel degré d'exactitude; il suffit de faire une évaluation large de la quotité des réserves mathématiques à conserver par la Compagnie. Une limitation trop étroite et absolument rigoureuse ne saurait constituer qu'une mesure vexatoire.

L'existence des réserves mathématiques est vérifiée sur place par les commissaires-contrôleurs, et les valeurs représentatives de ces réserves doivent figurer à l'actif du bilan établi annuellement et adressé par chacune des Sociétés au contrôle central, au Ministère du Travail et de la Prévoyance sociale.

L'actif des entreprises françaises doit d'ailleurs, ainsi que le prescrit le décret du 9 juin 1906, rendu en application de l'article 8 de la loi du 17 mars 1905, être employé ainsi qu'il suit :

1° Sans limitation : en valeurs émises par l'État français ou pourvues par lui d'une garantie portant sur le capital ou sur le revenu; en obligations libérées et négociables des départements, des communes et des chambres de commerce de France et d'Algérie; en obligations foncières et communales du Crédit foncier de France; en prêts sur toutes les susdites valeurs, jusqu'à concurrence de 75 % de leur cours; en avances sur les polices émises par l'entreprise; en prêts hypothécaires sur la propriété urbaine bâtie en France, sans que ces prêts, y compris les prêts antérieurement inscrits, puissent dépasser 50 % de la valeur de l'immeuble;

2° Dans la proportion de 2/5 au plus : en prêts aux départements, aux communes, aux chambres de commerce de France et d'Algérie, ainsi qu'aux colonies

françaises ou aux pays de protectorat; en immeubles situés en France et en Algérie; en prêts hypothécaires sur ces immeubles, jusqu'à concurrence de 50 % de leur valeur dans les conditions ci-dessus indiquées;

3° Dans la proportion d'un quart au plus : en valeurs de toute nature françaises ou étrangères, figurant à la cote officielle de la Bourse de Paris et inscrites sur une liste préalablement approuvée par l'assemblée générale des actionnaires; en prêts sur ces valeurs jusqu'à concurrence de 75 % de leur cours; en immeubles situés dans les colonies françaises ou dans les pays de protectorat; en prêts hypothécaires sur ces immeubles jusqu'à concurrence de 50 % de leur valeur, comme il est dit ci-dessus.

L'article 3 du même décret précise la manière dont doit être faite l'évaluation des diverses valeurs d'actif en vue des inventaires annuels. Les valeurs mobilières, toujours nominatives, sont estimées au prix d'achat, sauf lorsque, pour l'ensemble de ces valeurs, ce prix est supérieur de plus de 5 % à celui qui résulterait du cours de la Bourse à la date de la clôture de l'inventaire. Dans ce cas, un arrêté ministériel pris après avis du Comité consultatif des assurances sur la vie, fixera les conditions et le délai dans lesquels la valeur estimative devra être réduite de la différence entre le prix d'achat et le prix résultant de l'évaluation aux cours susvisés. Les prêts divers et les avances sur polices sont estimés d'après les actes qui en font foi, et en tenant compte, à chaque inventaire, des amortissements effectués. Les immeubles sont évalués d'après le prix d'achat ou le prix de revient, et le ministre peut toujours, à une époque quelconque et après avis du

Comité consultatif, faire procéder à la vérification de la valeur des immeubles.

Les nues propriétés et usufruits, dont les valeurs sont comprises dans les diverses catégories de portions d'actif qui correspondent à leur nature, sont évaluées d'après des règles spéciales fixées par arrêté ministériel.

Jusqu'à concurrence du montant des réserves mathématiques [1], l'actif est affecté au règlement des opérations d'assurances par un privilège qui prend rang après le paragraphe 6 de l'article 2101 du Code civil.

Pour les entreprises étrangères, les valeurs représentant la portion d'actif correspondante doivent, à l'exception des immeubles, faire l'objet d'un dépôt à la Caisse des dépôts et consignations. Il ne s'agit, bien entendu, que des réserves afférentes aux contrats souscrits ou gérés en France et dans les colonies françaises.

Enfin, chaque année, les entreprises doivent produire la comparaison entre la mortalité réelle de leurs assurés et la mortalité prévue par les tables et entre le taux de leurs placements réels et le taux admis dans les calculs. En cas d'écarts notables ou répétés portant sur un de ces éléments, des arrêtés ministériels peuvent exiger, au plus tous les cinq ans, une rectification des bases du calcul des réserves mathématiques des opérations en cours et des tarifs des primes.

[1] Ainsi que de la réserve de garantie et du montant des comptes individuels de participation, quand les bénéfices ne sont pas payables annuellement (art. 7 de la loi).

M. — TRANSFORMATION DES CONTRATS

On peut concevoir divers modes de transformation de contrats. L'assuré peut en effet demander à remplacer une prime viagère par une prime temporaire sans rien changer aux autres conditions de sa police, ou à substituer une prime payable trimestriellement ou semestriellement à une prime payable annuellement. Sans modifier la nature de l'assurance, la Compagnie peut consentir une augmentation du capital assuré. Enfin, un contrat peut être substitué à un autre contrat de nature absolument différente. Nous allons indiquer rapidement quels sont les procédés à employer pour opérer ces diverses transformations en agissant équitablement et en ménageant à la fois les intérêts des deux parties contractantes.

Comme cas particulier de transformation, nous aurons à examiner ce qui se passe lorsque l'assuré cesse de payer les primes de son contrat, et nous verrons dans quels cas il doit y avoir résiliation pure et simple, rachat ou réduction de la police.

Changement de mode de payement de la prime. — Un changement de mode de payement de la prime n'entraîne aucune modification dans les engagements de l'assureur. Les nouveaux engagements de l'assuré doivent donc être équivalents aux anciens, et il suffit d'exprimer cette équivalence au moment de la

transformation pour obtenir la valeur de la nouvelle prime à payer.

Ainsi, supposons que la prime annuelle ϖ'' d'un contrat reposant sur une tête d'âge x soit viagère, et que l'on veuille la remplacer par une prime annuelle $\varpi''^{(n)}$ temporaire de n années. On aura, en supposant que l'on se place à l'instant qui précède le payement d'une prime :

$$\varpi''(1+a_x)=\varpi''^{(n)}(1+a_x^{(n-1)}).$$

La durée du payement des primes restant la même, si la prime devient payable en k fois par an, au lieu de l'être annuellement, on aura :

$$\varpi''(1+a_x)=\varpi''_k\left(\frac{1}{k}+{}_ka_x\right)=\varpi''_k\left(a_x+\frac{k+1}{2k}\right),$$

dans l'hypothèse d'une prime viagère, et

$$\varpi''(1+a_x^{(n-1)})=\varpi''_k\left({}_ka_x^{(n)}+\frac{1}{k}(1-P_x^n)\right)$$

$$=\varpi''_k\left(a_x^{(n)}+\frac{k-1}{2k}(1-P_x^n)\right),$$

dans l'hypothèse d'une prime temporaire payable pendant n années au plus.

Les Compagnies n'appliquent pas exactement ces relations; elles se contentent de majorer les primes annuelles de 2 $^0/_0$ quand elles deviennent payables semestriellement, et de 3 $^0/_0$ quand elles sont acquittées par trimestres (se reporter à la page 121).

Augmentation du capital assuré. — Le titulaire d'une police au capital C_1 et à la prime annuelle

commerciale ϖ''_1 désire, sans modifier la nature du contrat, augmenter le capital assuré et le porter à la valeur $C_1 + C_2$. L'assureur aura à débourser une commission correspondant à l'accroissement C_2 du capital. La modification sera équivalente à la souscription d'une nouvelle police de même nature que la première, au capital C_2, comportant le payement d'une prime annuelle commerciale ϖ''_2 calculée d'après l'âge de l'assuré à l'époque de l'augmentation du capital. La nouvelle prime à payer annuellement sera donc : $\varpi''_1 + \varpi''_2$.

Transformation quelconque. — Le problème est le suivant : Un assuré désire remplacer sa police en cours par une nouvelle police, de nature différente. Quelle sera la valeur de la nouvelle prime annuelle à payer?

Soit C_1 le capital primitivement assuré et ϖ''_1 la prime annuelle du contrat correspondant. Au moment choisi pour effectuer la transformation, ce contrat est annulé. Une partie des primes payées a été utilisée pour couvrir le risque pendant les années écoulées; l'autre partie a servi à constituer la réserve. Cette réserve, inscrite chaque année au crédit du compte de l'assuré, ne sera pas perdue pour lui au moment de la transformation; elle sera considérée comme une prime unique versée à cette époque à l'assureur pour couvrir une partie du nouveau risque. Mais cette réserve se trouve déjà dans la caisse de l'assureur, elle ne nécessite donc en aucune façon le payement de frais d'acquisition ou d'encaissement : elle peut être considérée comme une prime d'inventaire assurant un capital C'_2.

L'assuré aura donc à verser une prime annulle ϖ''_2 destinée à garantir, dans les conditions du nouveau contrat, un capital égal à $C'_2 = C_2 - C'_2$, si l'on désigne par C_2 le nouveau capital assuré.

On doit remarquer que, logiquement, la réserve de la police primitive, calculée au moyen des primes d'inventaire, doit être diminuée d'une somme équivalente aux frais d'acquisition non encore amortis, puisque la prime ϖ_1 qui cesse d'être payée comportait un chargement correspondant.

Pour prendre un exemple, supposons que la police primitive était une police vie entière à primes viagères qui avait été souscrite par un assuré d'âge x. Avec les notations habituelles :

$$(1 - \varepsilon)\varpi''_1 = \varpi_1 + f + \frac{F}{1 + a_x} = \varpi'_1 + \frac{F}{1 + a_x},$$

n années après la prise d'effet du contrat, le titulaire désire le remplacer par un autre. A cette époque la réserve, calculée à la prime d'inventaire, est égale à

$$V'_{(x+n)_1} = C_1 \Pi'_{(x+n)_1} - \varpi'_1 (1 + a_{x+n}),$$

$\Pi'_{(x+n)_1}$ étant la prime unique de la même assurance au capital 1 souscrite sur une tête d'âge $(x + n)$. Mais la prime ϖ''_1 contenait un chargement $\frac{F}{1 + a_x}$, qui devait être encaissé par la Compagnie jusqu'au décès de l'assuré et qui ne le sera pas. Il est donc juste que la Compagnie prélève sur la réserve $V'_{(x+n)_1}$ la valeur actuelle de cet usufruit, soit : $\frac{F}{1 + a_x}(1 + a_{x+n})$.

La valeur de la réserve qui doit être considérée comme prime unique d'inventaire garantissant un capital C'_2 dans les conditions stipulées au nouveau contrat est donc :

$$W'_{(x+n)_1} = C_1 \Pi'_{(x+n)_1} - \varpi'_1(1 + a_{x+n}) - \frac{F}{1 + a_x}(1 + a_{x+n})$$

$$= C_1 \Pi'_{(x+n)_1} - (1 - \varepsilon)\varpi''_1(1 + a_{x-n}), \qquad (1)$$

et on aura :

$$C'_2 = \frac{W'_{(x+n)_1}}{\Pi'_{(x+n)_2}}, \qquad (2)$$

en désignant par $\Pi'_{(x+n)_2}$ la prime d'inventaire de la nouvelle combinaison adoptée, pour un capital égal à l'unité.

Si C_2 est supérieur à C_1, les Compagnies accordent généralement au courtier une commission qui correspond à l'accroissement $(C_2 - C_1)$. Dans le calcul de la nouvelle prime ϖ''_2, on doit donc tenir compte :

1° des frais d'encaissement;

2° des frais de gestion ;

3° des frais d'acquisition versés à l'occasion de l'augmentation du capital assuré.

L'assuré peut désirer que son nouveau contrat comporte le payement d'une prime annuelle égale à celle qu'il aurait eu à payer dès l'origine s'il avait choisi à cette époque la combinaison définitivement adoptée. Soit ϖ''_3 cette prime. Au moment de la transformation, la réserve d'inventaire du contrat primitif, déduction faite des frais d'acquisition non encore amortis, serait

égale à W_1. Si la deuxième combinaison avait été adoptée dès l'origine, la réserve correspondante, frais d'acquisition amortis, serait W_3. Si l'on suppose le payement d'une commission nouvelle au moment de la transformation, commission correspondant à la différence des capitaux assurés, on peut admettre que le versement par l'assuré d'une somme égale à $\frac{W_3 - W_1}{1 - \varepsilon}$ mettra, en rétablissant la réserve à la valeur W_3, les deux parties contractantes dans la même situation que si le contrat avait été souscrit dès l'origine à la prime finale ϖ''_3. La transformation est dite alors *à effet remontant.*

Si la transformation correspond à une aggravation du risque, comme cela arrive lorsqu'un contrat vie entière est substitué à un contrat mixte, puisque, pour un même capital payé en cas de décès, les primes deviennent moindres, la Compagnie ne doit évidemment y consentir qu'après avoir fait subir à l'assuré un nouvel examen médical.

Rachat et réduction. — Un cas particulier du problème précédent se présente lorsque l'assuré résilie purement et simplement son contrat sans le remplacer par un autre, lorsqu'à un moment donné il refuse d'en acquitter les primes. La partie des primes qui a été payée en trop pour couvrir le risque pendant les années écoulées a servi à constituer la réserve. Si la prime avait été variable chaque année et exactement suffisante pour couvrir le risque, l'assureur aurait été

exactement indemnisé, et le contrat serait résilié sans donner lieu au payement d'aucune indemnité.

Mais, d'après le mode de calcul usité, les primes qui ont été payées annuellement étaient exagérées, et l'excédent a donné lieu à la constitution d'une réserve. Cette réserve n'est-elle pas entièrement la propriété de l'assuré ? Il semble *a priori* que cela ne fasse aucun doute. Cependant, si l'on se souvient de ce qui a été dit à propos du jeu des réserves, on sait que la réserve d'un contrat particulier perd toute individualité dans la masse des réserves de la Compagnie, et le système ne peut fonctionner normalement qu'à la condition de bloquer ensemble toutes les réserves dont la masse amortit les oscillations dues aux sinistres qui surviennent. De plus, la réserve, versée dans la caisse de la Compagnie, doit être gérée par cette dernière, qui court, de ce fait, un risque provenant de ce que le taux prévu, pour le placement de cette réserve, dans le calcul de sa valeur, peut n'être pas atteint. Enfin, si un grand nombre d'assurés demandaient en même temps le remboursement des réserves de leurs contrats, il en résulterait un déplacement de fonds qui pourrait être fort préjudiciable à la bonne marche des opérations de la Compagnie, par suite de l'obligation où elle serait de vendre d'un seul coup une grande quantité de valeurs sur lesquelles elle pourrait se trouver en perte, si l'état du marché n'était pas satisfaisant.

Pour toutes ces raisons, on voit que, si l'on ne saurait raisonnablement prétendre que la réserve d'un contrat particulier perdue dans la masse des réserves des contrats de même espèce a cessé complètement d'appartenir à l'assuré, on doit néanmoins reconnaître

que la Compagnie a acquis sur cette réserve un certain droit de propriété et qu'il serait injuste de vouloir l'obliger à la rembourser intégralement au moment de la dénonciation du contrat, dénonciation qui, il faut bien le remarquer, ne peut être le fait que de l'une des deux parties contractantes : l'assuré.

L'assuré qui voudra résilier son contrat et qui réclamera le remboursement de la réserve qui figure à son actif au compte qu'il a avec la Compagnie, ne recevra donc pas ce remboursement intégral; mais il devra laisser à l'assureur une indemnité de résiliation qui viendra en déduction de cette somme. On dit qu'il y a alors *rachat* du contrat.

Mais l'assuré peut ne pas réclamer le remboursement de la réserve afférente à son contrat : le capital assuré sera alors *réduit*, la réserve étant considérée comme la prime unique d'une combinaison de même nature que la combinaison primitive, et de capital moindre. Cette transformation ne donnera lieu pour l'assureur à la perception d'aucune indemnité; il ne subit en effet aucun dommage, et, comme il n'y a pas de déplacement de fonds, la réduction ne lui fait courir aucun risque de perte d'argent.

La valeur du nouveau capital assuré s'obtient comme dans le cas d'une transformation quelconque de contrat, en calculant la valeur de la réserve W'_1 de la police primitive au moment de la cessation du payement des primes, déduction faite des frais d'acquisition non encore amortis à cette époque.

Cette réserve, considérée comme la prime unique d'une combinaison de même nature que la primitive,

garantira un capital C_2 et assurera le payement des frais de gestion jusqu'à l'échéance. Donc si Π'_1 est la prime unique d'inventaire de la combinaison considérée pour un capital égal à l'unité :

$$C_2 = \frac{W'_1}{\Pi'_1}.$$

Si nous reprenons l'exemple du paragraphe précédent, d'une assurance vie entière soucrite sur une tête d'âge x et abandonnée n années plus tard, les formules (1) et (2) appliquées au cas de la réduction donneront :

$$W'_{(x+n)_1} = C_1 \Pi'_{(x+n)_1} - (1-\varepsilon)\varpi''_1 (1 + a_{x+n})$$

$$C_2 = \frac{W'_{(x+n)_1}}{\Pi'_{(x+n)_1}} = C_1 - \frac{(1-\varepsilon)\varpi''_1 (1 + a_{x+n})}{\Pi'_{(x+n)_1}}.$$

Il y a une restriction à faire relativement au rachat et à la réduction des contrats : ces opérations ne sont consenties par la Compagnie que si la police a au moins trois années de durée, et si les primes des trois premières années ont été intégralement acquittées. Sinon, la résiliation de la police ne donne lieu à aucun remboursement à l'assuré, car la portion des primes non dépensée pour couvrir le risque et subvenir aux frais de gestion est souvent à peine équivalente aux frais d'acquisition.

La réduction est, pour les raisons énumérées plus haut, plus facilement accordée que le rachat. Si l'assuré ne demande pas expressément le rachat, la réduction est appliquée à son contrat.

Le rachat n'est d'ailleurs accordé que pour certaines catégories à réserve assez forte pour laisser, après prélèvement d'une indemnité de résiliation, une valeur de rachat suffisante : vie entière, mixte, terme fixe ou combinaisons analogues.

Les rentes viagères en cours de jouissance ne sauraient évidemment donner lieu à un rachat; l'assuré a rempli tous ses engagements, et ceux de l'assureur sont absolument fermes et ne sauraient être dénoncés.

Les assurances différées en cas de vie nécessiteraient pour leur rachat une nouvelle visite médicale permettant de constater que le contractant qui demande la résiliation de sa police est en bonne santé, et que l'on ne se trouve pas en face d'un assuré mal portant qui est certain de ne pas arriver au terme de son assurance. Il s'opérerait ainsi une sélection au détriment de la Compagnie. Aussi, pour éviter les contestations qui ne manqueraient pas de s'élever à ce sujet, les Compagnies n'admettent-elles pas le rachat des combinaisons en cas de vie, et elles les soumettent à la réduction.

Les assurances de survie, les assurances temporaires de courte durée, catégories à faible réserve[1], ne donnent lieu, en cas de résiliation, à aucun remboursement ni à aucune réduction. Elles s'annulent purement et simplement.

Les assurances sur la vie entière peuvent être rachetées. Les Compagnies calculent alors le montant du rachat comme il a été indiqué plus haut, en retranchant de la réserve du contrat la portion non amortie

[1] Car le risque varie très peu d'année en année.

des frais d'acquisition et en prélevant une indemnité de résiliation qui est généralement égale à un tant pour cent de la réserve.

Quelquefois, lorsque l'assuré le demande, les Compagnies consentent à indiquer au contrat la valeur du rachat au bout d'un certain nombre d'années. Les Compagnies américaines inscrivent même sur toutes leurs polices avec participation, ou plutôt avec accumulation (voir page 213), la valeur de rachat relative à la fin de la période d'accumulation. Par raison de concurrence, les Compagnies françaises ont été amenées à les imiter. De là sont nées des combinaisons diverses, dont voici un exemple entre autres :

Une tête d'âge x souscrit une assurance vie entière au capital C moyennant payement d'une prime annuelle ϖ_1''. La Compagnie lui garantit au bout de la n^e année d'assurance une valeur de rachat R de sa police. Il contracte en outre l'assurance d'un capital différé égal à (C — R) avec contre-assurance des primes annuelles ϖ_2''. Il a donc à payer par an une prime totale égale à $\left(\varpi_1'' + \varpi_2''\right)$. S'il vit à l'expiration du différé et qu'il veuille user de la faculté de rachat qui lui est accordée, il touchera un capital égal à

$$C - R + R = C.$$

Mais s'il meurt avant cette époque, dans le cours de la k^e année d'assurance, par exemple, le capital payé par la Compagnie sera : $C + k\varpi_2''$.

Comparons cette combinaison à la mixte de n années. Que l'assuré par un contrat mixte meure avant

l'expiration de la police ou qu'il vive à l'échéance, le capital versé par l'assureur sera C pour une prime annuelle égale à ϖ''. Moyennant le payement d'une surprime annuelle égale à $\left[\varpi'' - \left(\varpi''_1 + \varpi''_2\right)\right]$, on s'assure donc l'avantage de toucher $k\varpi''_2$ de plus si la mort se produit dans le courant de la k^e année, k étant inférieur à n.

On peut aisément calculer les différentes primes ϖ'', ϖ''_1, ϖ''_2, et apprécier la valeur réelle de cet avantage. Un exemple concret correspondant à un âge moyen permettra de s'en faire une idée.

Supposons qu'il s'agisse d'une tête d'âge 30 ans 3/4 à son entrée dans l'assurance, le capital C étant égal à 100 000 francs. Un tarif de primes commerciales nous donne pour ϖ''_1 la valeur 2450 francs. Le capital R de rachat du contrat au bout de 20 ans sera 24 580 francs. Le capital différé sera donc égal à $100000 - 24580 = 75420$ francs, et la prime ϖ''_2 de ce capital différé avec contre-assurance est 2 678 francs. La prime totale de la combinaison est donc 5 128 francs. La prime annuelle d'une mixte de 20 ans, garantissant un capital de 100000 francs et reposant sur la même tête, serait égale à 4 645 francs. Moyennant le payement d'une prime annuelle de 483 francs, la tête assurée contracte donc une assurance au décès, temporaire de 20 ans, au capital croissant en progression arithmétique, et égal successivement à :

2678 fr., 5356 fr. ... 53560 fr.

et 0 à la fin de la 20e année. Cette prime de 483

francs aurait permis au contractant de souscrire une nouvelle police mixte de plus de 10000 francs de capital, de sorte que la combinaison étudiée ne présente un avantage sur la mixte que si le décès se produit entre la 5e année et la fin de la 20e. Mais si l'assuré vit à l'échéance du contrat, il aura versé une surprime annuelle de 483 francs pour n'en retirer aucun bénéfice.

Les combinaisons de ce genre ne sont pas à encourager. Elles ressemblent autant à une spéculation sur la vie humaine qu'à une œuvre de prévoyance. Elles n'ont obtenu un certain succès que parce qu'elles frappent, comme les combinaisons avec participation, l'esprit des gens irréfléchis et cupides qui recherchent dans l'assurance sur la vie un placement avantageux.

Remarquons, avant d'abandonner cette question, et en nous plaçant à un tout autre point de vue, que, dans la statistique des assurés, il sera bon de créer une catégorie à part pour ceux qui ont demandé la mention sur leur contrat du capital de rachat au bout d'un temps donné et de ne pas les confondre dans la statistique générale des assurés en vie entière.

La réduction des contrats vie entière se calcule comme il a été dit plus haut, en considérant la réserve, déduction faite des frais d'acquisition non amortis, comme la prime unique d'une assurance vie entière conclue à l'âge de l'assuré au moment de la transformation, et sans retenir d'indemnité de résiliation.

Pour les assurances à terme : terme fixe, mixtes, différées en cas de vie, dotales, combinées, les Compagnies ont l'habitude de ne pas faire un calcul rigoureux, mais d'opérer d'une façon très simple, qui con-

siste à admettre que le capital assuré est réduit dans le rapport des primes payées au total des primes qui auraient dû l'être si le terme de l'assurance avait été atteint. L'assuré peut ainsi calculer aisément lui-même la valeur de son contrat réduit; mais le procédé n'est pas rigoureux et peut donner lieu à une perte ou à un bénéfice pour la Compagnie.

Il revient, en effet, à admettre que toutes les primes payées assurent une même partie du capital, ce qui n'est pas exact. Ainsi, pour les assurances différées en cas de vie, on peut aisément se rendre compte, en considérant les diverses primes annuelles comme des primes uniques payables d'année en année, que les primes des premières années assurent des capitaux supérieurs à ceux qui sont assurés par les primes des dernières années, et la réduction est à l'avantage de la Compagnie.

Pour les assurances mixtes et à terme fixe, on ne peut *a priori* dire si la réduction, calculée comme il vient d'être dit, laissera à l'assureur un bénéfice ou une perte. Mais on peut constater, sur des exemples particuliers, que l'écart n'est jamais très important.

Si l'on appliquait le même mode de calcul à une assurance vie entière à primes temporaires payables pendant p années, souscrite sur une tête d'âge x et abandonnée au bout de n années, on verrait que la quantité (page 275) :

$$C - \frac{(1 - \varepsilon)\omega''_{(x)}\left(1 + a_{x+n}^{(p-n-1)}\right)}{\Pi'_{x+n}} - \frac{n}{p} C$$

est presque toujours négative, et la Compagnie serait en perte. Aussi les Compagnies n'appliquent-elles pas

ce mode de calcul dans ce cas : elles calculent exactement la valeur du capital réduit.

Le procédé le plus courant pour évaluer le capital de rachat de l'assurance mixte ou à terme fixe consiste à considérer ce capital comme la valeur actuelle, escomptée à un taux convenablement choisi[1], du capital de réduction de la police supposé payable au terme du contrat. Ce procédé ne donnerait lieu à aucune indemnité de résiliation dans le cas du contrat à terme fixe, si le taux d'escompte était le même que le taux adopté pour le calcul des primes. Aussi majore-t-on ce taux de manière à obtenir dans tous les cas une indemnité de résiliation.

Les contrats d'assurance dotale ordinaire ne se rachètent pas ; mais quand ils comportent la contre-assurance des primes, leur valeur de rachat est la valeur escomptée du montant des primes versées, pour la durée qui reste à courir.

Enfin, la valeur de rachat d'une combinée s'obtient en multipliant sa valeur de réduction par la valeur d'un capital de 100 francs payable au décès de l'assuré.

[1] Généralement 4 %.

CHAPITRE IV

DE QUELQUES ORGANISMES PARTICULIERS D'ASSURANCES SUR LA VIE

N. — ASSURANCES GARANTIES PAR L'ÉTAT

CAISSE NATIONALE D'ASSURANCE EN CAS DE DÉCÈS

Créée par la loi du 11 juillet 1868, elle a pour objet, moyennant le payement de primes uniques ou de primes annuelles, de garantir, au décès de l'assuré, le versement d'une somme convenue à ses héritiers ou ayants droit.

Elle est gérée par la Caisse des Dépôts et Consignations.

Le tarif adopté est basé sur la table de mortalité de Deparcieux. Le taux de capitalisation, primitivement fixé à 4 %, a été ramené à 3 % par le décret du 28 décembre 1893. Les primes pures, calculées sur ces bases, sont majorées de 6 % pour frais de gestion. La Caisse ne paye en effet aucun courtage ou commission.

Des règles particulières s'appliquent aux contrats souscrits auprès de la Caisse Nationale. Ainsi toute assurance faite moins de deux ans avant le décès de l'assuré demeure sans effet, et les versements effectués sont restitués aux ayants droit avec les intérêts simples

à 3 %. Les sommes assurées sur une tête ne peuvent excéder 3000 fr.; elles sont incessibles et insaisissables jusqu'à concurrence de la moitié, sans toutefois que la partie incessible et insaisissable puisse descendre au-dessous de 600 fr. L'impayement des primes donne lieu à la réduction du contrat, calculée en considérant la réserve comme une prime unique au tarif.

La Caisse n'accepte que les contrats souscrits sur des têtes âgées de 16 ans au moins et de 60 ans au plus[1].

Les modifications à apporter au tarif sont déterminées, depuis la loi de finances du 26 juillet 1893, par un décret du Président de la République, et lorsque des modifications seront apportées au tarif, elles ne s'appliqueront qu'aux assurances nouvelles contractées à partir du 1er janvier qui suivra la date du décret les déterminant. Le taux de l'intérêt est fixé en tenant compte des placements effectués par la Caisse et gradué par quart de franc.

L'actif de la Caisse est placé en rentes sur l'État.

Malgré la table adoptée qui est, on le sait, à mortalité trop rapide, et le peu d'importance du chargement (6 % de la prime pure), le tarif de la Caisse n'est pas aussi différent qu'on pourrait le croire de celui des Compagnies françaises, grâce à la faiblesse du taux choisi (3 %).

Il est à noter enfin que la Caisse d'assurance en cas de décès ne fait aucune sélection entre les proposants à leur entrée dans l'assurance et n'exige pas de visite médicale. Elle se considère comme suffisamment ga-

[1] Il en est ainsi, d'ailleurs, de toutes les Compagnies françaises. Il est bon de rappeler ici que la loi du 8 décembre 1904 établit que toute assurance au décès reposant sur une tête de moins de 12 ans doit être considérée comme contraire à l'ordre public.

rantie par l'article 3 de la loi du 11 juillet 1868, qui exclut du bénéfice de l'assurance les ayants droit de tout assuré dont le décès a lieu dans les deux premières années du contrat.

Malgré les avantages réels offerts par la Caisse Nationale : garantie de l'État, suppression de la visite médicale, tarif un peu moins élevé que celui des Compagnies, modifications de tarif sans effet sur les contrats en cours, cette Caisse est peu connue et a peu de succès[1]. Son chiffre d'opérations annuel est très faible.

[1] Les capitaux assurés du 11 juillet 1868 au 31 décembre 1906 se sont élevés à 6 095 275 fr. 53 pour 3 609 contrats.

Les capitaux assurés depuis la mise en vigueur de la loi du 17 juillet 1897 (mixtes) se sont élevés à 237 651 francs pour 67 assurances.

Au 31 décembre 1905, il n'y avait encore eu que 4 assurances temporaires souscrites depuis la mise en vigueur de la loi du 30 nov. 1894; mais 58 contrats de cette nature ont été souscrits en 1906, de sorte qu'au 31 décembre 1906 il existait 62 contrats temporaires souscrits pour des capitaux s'élevant, depuis l'origine, à 366 379 fr. 65.

En retranchant des chiffres précédents le montant des contrats arrivés à expiration depuis l'origine, ou annulés pour une cause quelconque, on trouve que les capitaux assurés, au 31 décembre 1906, pour les diverses catégories d'assurances individuelles, atteignent la somme totale de 4 153 064 fr. 64.

Le nombre des assurances individuelles contractées en 1906 est de 115 pour les assurances vie entière, de 24 pour les assurances mixtes et de 58 pour les assurances temporaires, pour un capital de 570 731 fr. 45, chiffre en augmentation de 347 992 fr. 53 sur l'année précédente (augmentation due aux assurances temporaires). De plus, 198 sociétés de secours mutuels ont contracté en 1906 des assurances en cas de décès, pour 34 058 membres participants.

Les recettes provenant des assurances individuelles se montent, en 1906, à 103 111 fr. 96, et celles provenant des assurances collectives à 216 150 fr. 95, ce qui fait un total de 319 262 fr. 91.

(*Journal officiel* du 19 juillet 1907.)

Faut-il voir la cause de cet insuccès dans la limitation au maximum de 3000 fr. du capital qu'il est possible d'assurer, limitation qui avait pour but d'attirer surtout les classes populaires, dont l'éducation sociale est encore rudimentaire et qui considèrent l'assurance sur la vie comme un luxe hors de leur portée, ou n'est-il pas plutôt dû à l'absence des courtiers qui sont un facteur important de la prospérité d'une Compagnie par la publicité qu'ils lui donnent et par les facilités qu'ils offrent aux proposants pour remplir toutes les formalités nécessaires à la conclusion des contrats?

Notons, en terminant, que la Caisse d'assurance en cas de décès a été autorisée par la loi du 11 juillet 1868 à consentir des contrats collectifs au bénéfice des membres des sociétés de secours mutuels, et par les lois du 30 novembre 1894 et du 17 juillet 1897, à réaliser des assurances temporaires relatives aux habitations à bon marché et des assurances mixtes.

CAISSE NATIONALE DES RETRAITES POUR LA VIEILLESSE

La Caisse des Retraites, créée par la loi du 18 juin 1850, a été complètement réorganisée par la loi du 20 juillet 1886. Elle est, elle aussi, gérée par l'administration de la Caisse des Dépôts et Consignations et elle fonctionne sous la garantie de l'État.

Les versements sont reçus et liquidés à partir de 1 fr. et sans fraction de franc. Ils peuvent être faits, soit à capital aliéné, soit à capital réservé (art. 5 de la loi). Le maximum de la rente viagère que la Caisse

Nationale est autorisée à inscrire sur la même tête est fixé à 1 200 fr., et les sommes versées à la Caisse en une année, au compte de la même personne, ne peuvent dépasser 500 fr.

Les rentes viagères constituées par la Caisse Nationale sont incessibles et insaisissables jusqu'à concurrence de 360 francs. Au delà de 360 francs, elles sont saisissables à concurrence d'un dixième de la somme excédant ce chiffre, et cessibles pour un autre dixième (loi de finances du 17 avril 1906). Les rentes peuvent être à capital aliéné ou à capital réservé. Nous avons établi en temps et lieu les formules permettant de calculer les primes de ces combinaisons.

Les tarifs sont établis d'après la table de mortalité désignée sous le nom de table CR, dressée à l'aide de l'observation des rentiers viagers de la Caisse elle-même. Ils ne sont calculés que jusqu'à l'âge de 65 ans. Le taux d'intérêt est fixé chaque année par décret; il peut varier de fractions égales à un ou plusieurs quarts de francs. Il est actuellement de 3 1/2 0/0 par an, ou plutôt de 7/8 0/0 par trimestre.

Les versements peuvent être faits au profit de toute personne âgée de plus de 3 ans, et l'entrée en jouissance de la rente est fixée, au choix du déposant, à partir de chaque année d'âge accomplie de 50 à 65 ans. Les arrérages sont payés par trimestres échus, les 1er mars, 1er juin, 1er septembre et 1er décembre de chaque année. Les arrérages non perçus se prescrivent par cinq ans. Les rentes dont les arrérages n'ont point été réclamés pendant trois années consécutives, sont présumées éteintes et ne peuvent être rétablies que sur la justification de l'existence du titulaire. Les arrérages

échus au décès du rentier sont payés à ses héritiers ou ayants droits, comme les capitaux réservés s'il y a lieu.

Les opérations de la Caisse Nationale des Retraites pour la vieillesse sont beaucoup plus importantes [1] que celles de la Caisse d'assurances en cas de décès. Chaque année paraît au *Journal officiel* le rapport adressé au président de la République par la Commission supérieure sur les opérations de la Caisse pendant l'année précédente et sa situation au 31 décembre. « La Caisse nationale des retraites établit chaque année le bilan de ses opérations » (art. 23 de la loi du 20 juillet 1886). Les fonds de la Caisse sont employés en rentes sur l'État, en valeurs du Trésor, ou, sur la proposition de la Commission supérieure et avec l'autorisation du ministre des Finances, soit en valeurs garanties par le Trésor, soit en obligations départementales et communales (art. 22).

[1] Le *Journal officiel* du 19 juillet 1907 donne les chiffres suivants :

Du 11 mai 1851 au 31 décembre 1906, la Caisse a reçu, en vertu des lois des 18 juin 1850 et 20 juillet 1886, de 3023846 déposants, 51799103 versements s'élevant à 1493035470 fr. 84.

Elle a reçu en outre, en vertu de la loi du 9 avril 1898, 33097 versements représentant.	118065333 fr. 52
Elle a encaissé pour arrérages, intérêts, etc.	906221706 fr. 45
Ce qui fait en tout.	2517322510 fr. 81
Le total des dépenses pendant la même période s'est élevé à.	1148463614 fr. 65
Le montant total des versements effectués en 1906 a été de.	88524703 fr. 93

dont 19953279 fr. 43 en vertu de la loi du 9 avril 1898.

Le chiffre des recettes de l'exercice 1906 est 217961155 fr. 17.

Le succès de la Caisse des Retraites s'explique par diverses raisons: Le fonctionnaire, l'ouvrier, sont surtout préoccupés de s'assurer une vieillesse tranquille, à l'abri du besoin. Ce sentiment les conduit tout naturellement à économiser une partie de leur gain pour le déposer à la Caisse Nationale, qui a adopté un taux de capitalisation relativement élevé, qui est garantie par l'État, qui permet de verser les primes de la façon qui convient le mieux au déposant, au lieu où se trouve ce dernier, et de toucher les arrérages à la caisse publique désignée par le rentier lui-même, la plus proche de son domicile. La caisse offre de plus la faculté de réserver le capital versé. Enfin les versements s'effectuent très aisément, soit en numéraire, soit au moyen de bulletins retraites, sur lesquels les sommes sont représentées par des timbres-poste.

L'assurance contre la vieillesse est entrée dans les mœurs de la classe ouvrière; l'assurance au décès au contraire y est fort négligée et apparaît à beaucoup de travailleurs comme une chose superflue et en tous cas trop coûteuse. Aussi bien peu songent à s'assurer contre la mort, tandis que la plupart font de grands efforts pour s'assurer contre l'invalidité sénile.

Enfin la publicité faite autour de la Caisse des retraites a été beaucoup plus grande que celle que l'on a faite autour de la Caisse d'assurance au décès.

Les sociétés de secours mutuels, qui se développent de jour en jour davantage, ont contribué de leur côté à faire connaître la Caisse des Retraites; elles assurent en effet beaucoup plus volontiers une retraite à un certain âge qu'un capital au décès.

O. — TONTINES

Les tontines sont d'origine assez ancienne; elles ont précédé les assurances sur la vie proprement dites. Imaginées par un Italien du nom de Tonti, elles firent leur apparition en France vers le milieu du XVIIe siècle. C'étaient des associations formées pour un temps déterminé et telles que les survivants se partageaient, à l'expiration, l'actif de l'association, en tenant compte de leur âge à l'entrée et des sommes versées par eux. Certaines tontines avaient pour but de créer des dots aux enfants à leur majorité; d'autres comprenaient des personnes de tout âge, qui mettaient en commun leurs épargnes pour les faire fructifier, et les partager entre les survivants à la dissolution de la société; quelques-unes étaient des associations en cas de décès : elles étaient constituées généralement pour une année, mais elles eurent moins de succès que les associations de survie.

La gestion financière de ces sociétés fut en général assez mauvaise, et la plupart aboutirent à des désastres. « Deux mots résumeraient trop souvent les tontines : mauvaise action, mauvaise affaire. » (M. de Courcy, *De l'assurance par l'État.*) Aussi les tontines, qui avaient obtenu d'abord un vif succès, tombèrent-elles bientôt en discrédit, et la mésestime qui en résulta rejaillit sur toutes les opérations viagères. Les tontines furent prohibées, et on vit dans l'assurance sur la vie une opération illicite en raison

des spéculations immorales auxquelles elle pouvait donner lieu. Portalis, dans l'exposé des motifs du Code civil, s'est nettement prononcé contre l'assurance sur la vie, qui, d'après lui, ne doit pas être encouragée parce qu'elle contient un *votum mortis*. Et il reprend, à l'égard de l'assurance sur la vie, la formule des juristes romains : *Malum omen non est providendum.*

Il est bon de rappeler ici que les résultats fournis par diverses tontines ont servi à établir les premières tables de mortalité. Deparcieux utilisa les observations recueillies par les tontines de 1689, 1696 et 1734, et M. Beauvisage dressa sa table de mortalité (1867) d'après les résultats de la tontine Lafarge, qui eut son heure de succès à l'époque de la Révolution.

Sous la Restauration, de nouvelles tentatives furent faites pour fonder en France des sociétés ayant pour but la réalisation d'opérations viagères. Les préventions du public disparurent petit à petit, et les Compagnies nouvelles réussirent à gagner sa confiance. Cependant toute méfiance n'avait pas disparu à l'égard des tontines qui, tout en étant soumises, d'après la loi du 24 juillet 1867, à l'autorisation et à la surveillance du gouvernement, comme toutes les sociétés d'assurances sur la vie, furent astreintes à un régime spécial de surveillance institué par l'ordonnance du 5 juillet 1842.

Il faut reconnaître d'ailleurs qu'il est nécessaire de soumettre les opérations des tontines à un contrôle rigoureux et efficace, en raison même du problème compliqué soulevé par leur création, et qui consiste à répartir équitablement, en tenant compte de tous les facteurs qui interviennent (âges des associés, montant

des cotisations, chances inégales de survie, etc.), les sommes obtenues à l'expiration du contrat de société par la capitalisation des versements, déduction faite des frais généraux.

La loi du 17 mars 1905 a institué cette surveillance, et les décrets subséquents ont établi les principes d'après lesquels doivent être gérées les entreprises à forme tontinière. Ces entreprises sont aujourd'hui assez nombreuses. Sous le nom de mutuelles, elles s'adressent surtout à la petite épargne, acceptant des cotisations modiques et accordant toutes les facilités de payement désirables. Se comparant aux sociétés anonymes, elles font ressortir l'avantage qui résulte pour leurs propres sociétaires de la suppression des dividendes, de la répartition intégrale des bénéfices entre les associés tontiniers, et de la réduction au minimum des frais généraux. On a d'ailleurs le droit de rester sceptique à cet égard, quand on considère les énormes frais de publicité faits par quelques-unes de ces sociétés.

Dans l'étude sommaire qui va suivre, nous distinguerons les associations en cas de survie des associations en cas de décès.

Associations en cas de survie. — Elles fonctionnent généralement de la façon suivante :

Le conseil d'administration de la société ouvre chaque année, le 1er janvier, une association qui reçoit des souscriptions pendant un an, jusqu'au 31 décembre de la même année. Un maximum et un minimum d'âge sont généralement exigés pour l'admission dans les associations. Ne sont par exemple admises que les

personnes âgées de 3 ans au moins et de 55 ans au plus. L'association est définitivement constituée lorsqu'au 31 décembre de l'année de sa création, année dont le millésime sert à la désigner, elle a réuni au moins cent adhérents, minimum fixé par le décret du 12 mai 1906. La durée de l'association en cas de survie est déterminée à l'avance. Elle ne peut être inférieure à 10 ans ni supérieure à 25 (art. 29 du décret cité plus haut). Il est interdit aux sociétés à forme tontinière de garantir à leurs adhérents que la liquidation des associations dont ils font partie leur procurera une somme déterminée à l'avance (art. 30).

L'assurance peut être contractée par un souscripteur soit à son profit, soit au profit d'un tiers. Elle peut reposer sur sa propre tête ou sur celle d'un tiers. Chaque adhérent peut souscrire à plusieurs parts, mais un maximum de parts souscrites sur une même tête est fixé par les statuts.

Il est versé annuellement par part une même cotisation, quel que soit l'âge de l'assuré; mais il peut être substitué à ce versement annuel, et sans majoration, des versements semestriels, trimestriels ou même mensuels.

Il est facile de calculer quelle sera la somme à distribuer aux survivants à la dissolution de l'association, en supposant les cotisations annuelles payables en une seule fois et en adoptant un taux de capitalisation i convenable et une table de mortalité usuelle, telle que la table CR ou la table RF.

Supposons, en effet, qu'il entre v_x têtes d'âge x dans l'association considérée et que la cotisation annuelle à verser par chacune d'elles soit ϖ, la durée de

la société étant n années. A la dissolution, la valeur acquise par la somme des cotisations de première année de toutes ces têtes sera :

$$v_x \varpi (1 + i)^n.$$

Au début de la 2e année, les v_{x+1} têtes survivantes versent chacune une somme ϖ. La valeur acquise par les cotisations de 2e année sera :

$$v_{x+1} \varpi (1 + i)^{n-1},$$

et ainsi de suite. La somme totale à partager entre les v_{x+n} survivants sera donc, à l'expiration de la n^e année, en supposant k versements annuels consécutifs :

$$C = \varpi \Big[v_x (1 + i)^n + v_{x+1} (1 + i)^{n-1} + \dots + v_{x+k-1} (1 + i)^{n-k+1} \Big].$$

Chaque survivant recevra donc une somme égale à :

$$P_x = \frac{C}{v_{x+n}} = \varpi \left[\frac{v_x (1+i)^n}{v_{x+n}} + \dots + \frac{v_{x+k-1} (1+i)^{n-k+1}}{v_{x+n}} \right]$$

$$= \varpi \left[\frac{D_x}{D_{x+n}} + \dots + \frac{D_{x+k-1}}{D_{x+n}} \right] = \varpi \frac{N_x - N_{x+k}}{D_{x+n}}.$$

Mais dans chaque association il y a des assurés de tous les âges compris entre les âges limites a et b, et en supposant que le décès des sociétaires soit la seule cause qui intervienne pour faire cesser le payement des cotisations, le capital à partager à l'expiration des contrats d'une même classe sera la somme de tous les capitaux C :

$$\Sigma C = v_{a+n} P_a + v_{a+n+1} P_{a+1} + \dots + v_{x+n} P_x + \dots + v_{b+n} P_b,$$

si les hypothèses de taux et de mortalité admises sont vérifiées.

Si la somme totale obtenue est égale à S, la part P'_x de chaque sociétaire d'âge initial x sera donnée par la relation :

$$\frac{S}{\Sigma C} = \frac{P'_x}{P_x}.$$

Une foule de circonstances viennent modifier ces résultats simples. Nous avons supposé, en effet, que les cotisations étaient toutes payables en une seule fois, au début de l'année. Or elles sont généralement payables en plusieurs fois par an, et à toutes les époques de l'année.

De plus, certains assurés abandonnent l'association volontairement avant d'avoir rempli tous leurs engagements. Or, s'ils ont effectué les trois dixièmes des versements stipulés au contrat, celui-ci n'est pas annulé purement et simplement; mais il est réduit (décret du 12 mai 1906, art. 31). Sur quelles bases opérer cette réduction?

Enfin certains adhérents obtiennent d'entrer dans une classe de tontiniers quelques années après sa création, d'autres demandent à se libérer par un versement unique à un moment donné.

Le calcul des versements à effectuer dans ces différents cas et la répartition équitable des frais généraux entre les divers associés sont des problèmes assez compliqués et qui donnent lieu à controverses. Le cadre de ce traité ne nous permet pas de nous étendre davantage sur ces questions, et nous renvoyons pour leur étude à la note publiée par M. Goury dans le n° 67 du

Bulletin de l'Institut des actuaires français (décembre 1906).

Nous nous bornerons à faire remarquer que le problème général auquel donne lieu la constitution des associations en cas de survie peut ne pas avoir de solution, et cela se produit lorsqu'aucun assuré n'est vivant au moment de la dissolution de la société. L'affectation des fonds qui, pour cette raison, n'ont pu être répartis, doit être prévue par les statuts.

L'actif des entreprises à forme tontinière doit être employé en valeurs émises par l'État français ou pourvues par lui d'une garantie, en obligations libérées et négociables des départements, communes et chambres de commerce de France et d'Algérie, en obligations du Crédit foncier de France (art. 4 du décret du 9 juin 1906). Ces sociétés achètent surtout des valeurs à lots, et les lots et primes de remboursement obtenus sont mis en répartition avec les cotisations capitalisées des membres de l'association correspondante, car les fonds de chaque association doivent, d'après le décret du 22 juin 1906, être gérés séparément et ne peuvent se confondre à aucun égard avec ceux des autres associations.

Le dernier décret cité introduit certaines limitations dans la gestion des associations en cas de survie. Ainsi chaque association doit être liquidée immédiatement après son expiration. Les fonds provenant des souscriptions doivent être intégralement versés aux associations sous la seule déduction des frais de gestion statutaires, et ils doivent, ainsi que les intérêts, primes et lots, être placés dans le délai d'un mois; les valeurs acquises, déposées à la Caisse des dépôts et consigna-

tions ou à la Banque de France, ne peuvent être réalisées qu'à l'époque de la liquidation. Une délibération du conseil d'administration arrête alors la répartition entre les ayants droit, et copie en est adressée au Ministre du Travail. La répartition porte sur l'intégralité de l'avoir, et les droits des bénéficiaires sont ramenés à l'égalité proportionnelle au moyen de barêmes de répartition établis d'après une table de mortalité et un taux d'intérêt fixés par les statuts, en tenant compte de l'âge des sociétaires ainsi que du mode et de l'époque des versements.

Associations en cas de décès. — Deux sortes d'associations en cas de décès sont prévues par le décret du 22 juin 1906 : l'association générale en cas de décès et l'association de contre-assurance. Chacune d'elles doit être unique pour une même entreprise, et la liquidation de ces associations doit être annuelle (articles 10 et 11 du décret).

L'association générale en cas de décès a pour but d'assurer le payement d'une somme probable, déterminée à l'avance, lors du décès de l'assuré, s'il survient dans l'année. Ce capital probable est invariable, quelle que soit l'année du décès. Les primes, par contre, en raison de la liquidation annuelle, sont variables et évidemment proportionnelles au taux de mortalité correspondant à l'âge de l'assuré à l'époque considérée. Ainsi, si C est le capital payable au décès, la cotisation à verser au début de l'année par un associé d'âge x est : $Cq_x = C\frac{v_x - v_{x+1}}{v_x}$.

En réalité, il sera nécessaire de majorer cette cotisation pour parer aux écarts relatifs à la mortalité qui peuvent se produire et aussi pour subvenir aux frais de gestion. On tient compte des écarts de mortalité en augmentant les taux de mortalité de quantités convenables proportionnelles à leur valeur. Les frais de gestion pourraient être proportionnels aux cotisations; mais on préfère supposer que l'assuré restera un certain nombre d'années dans la combinaison, et on fait supporter la totalité des frais de gestion aux premières cotisations versées. De cette façon, celles-ci, qui sont en somme assez faibles, se trouvent chargées, tandis que les dernières, beaucoup plus élevées, sont les primes pures, exactement suffisantes pour couvrir le risque.

L'association de contre-assurance est corrélative des associations de survie. Elle est unique et comprend indistinctement tous les souscripteurs qui ont déclaré y adhérer, quelle que soit l'association de survie de laquelle ils font partie. Elle a pour objet de garantir les personnes participant à une de ces associations contre la perte qui résulterait, pour elles ou leurs ayants droit, du décès de l'assuré survenant avant le terme de cette association.

Si la contre-assurance est souscrite en même temps que l'assurance directe, il n'y a pas lieu de faire subir à l'assuré une visite médicale; mais si elle est postérieure, la visite médicale devient nécessaire.

La prime à payer chaque année est fixée proportionnellement à l'âge de l'assuré au 1er janvier, au nombre et au montant des annuités de survie contre assurées. Ainsi, si x est l'âge de l'assuré au 1er janvier

et k le nombre des primes annuelles, constantes et égales à ϖ, versées à cette époque et que l'on veut contre-assurer, la cotisation à payer au début de l'année est :

$$k\varpi\left[(1+\alpha)q_x+\beta\right]=k\varpi\left[q'_x+\beta\right],$$

en majorant le taux de mortalité proportionnellement à sa valeur, pour tenir compte des écarts possibles de la mortalité, et en ajoutant à la cotisation un chargement proportionnel au capital assuré $k\varpi$.

On pourra dresser un tableau à double entrée donnant la cotisation à verser au début d'une année quelconque. Il sera disposé de la façon ci-contre.

On peut remarquer que tous les nombres inscrits le long d'une diagonale allant de gauche à droite et de bas en haut sont égaux au premier multiplié successivement par 1, 2, ... k, ce dernier multiplicateur k subsistant pour les années, de k à n, où il n'est pas payé de cotisations d'assurance de survie.

L'association de contre-assurance se liquide à la fin de chaque année. L'avoir social est réalisé et réparti intégralement entre les ayants droit des assurés décédés au cours de l'année écoulée. Le total des cotisations, calculées comme il vient d'être dit, doit être suffisant pour rembourser le montant des annuités de survie payées par les associés décédés. Cependant il est prévu un fonds de garantie destiné à avancer, s'il y a lieu, la somme nécessaire pour parfaire ce remboursement. La caisse de contre-assurance rembourse dans les années suivantes les prélèvements faits sur le fonds de garantie.

Le tarif doit être établi sur une table de mortalité

AGE à L'ENTRÉE	1re ANNÉE	2e ANNÉE	3e ANNÉE	....	Ke ANNÉE (dernière du payement des cotisations de survie)	....	Ne ANNÉE (fin de l'association de survie)
a	$\varpi[q'_a+\beta]$	$2\varpi[q'_{a+1}+\beta]$	$3\varpi[q'_{a+2}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a+k-1}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a+n-1}+\beta]$
$a+1$	$\varpi[q'_{a+1}+\beta]$	$2\varpi[q'_{a+2}+\beta]$	$3\varpi[q'_{a+3}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a-k}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a+n}+\beta]$
$a+2$	$\varpi[q'_{a+2}+\beta]$	$2\varpi[q'_{a+3}+\beta]$	$3\varpi[q'_{a+4}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a+k-1}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a+n+1}+\beta]$
$a+3$	$\varpi[q'_{a+3}+\beta]$	$2\varpi[q'_{a-4}+\beta]$	$3\varpi[q'_{a+5}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a-k+2}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{a-n+2}+\beta]$
....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....
x	$\varpi[q'_x+\beta]$	$2\varpi[q'_{x+1}+\beta]$	$3\varpi[q'_{x+2}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{x+k-1}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{x+n-1}+\beta]$
....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....	....
b	$\varpi[q'_b+\beta]$	$2\varpi[q'_{b+1}+\beta]$	$3\varpi[q'_{b+2}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{b+k-1}+\beta]$	....	$k\varpi[q'_{b+n-1}+\beta]$

spécifiée par les statuts. C'est généralement l'une des tables AF ou RF.

L'actif des associations en cas de décès est soumis aux mêmes règles que celui des associations de survie; les valeurs qui le composent doivent être déposées de même soit à la Caisse des dépôts et consignations, soit à la Banque de France.

LIVRE II

ASSURANCES DIVERSES

CHAPITRE I

A. — ASSURANCE CONTRE LA MALADIE

Sociétés de secours mutuels. — On sait que l'assurance contre la maladie n'est pratiquée en France que par les Sociétés de secours mutuels. Il en est de même dans la plupart des nations étrangères, en Angleterre notamment, où les « Friendly Societies » jouent le même rôle que nos sociétés mutualistes. En Allemagne, l'assurance contre la maladie a été rendue obligatoire par la loi du 15 juin 1883, pour tous les ouvriers de l'industrie et les employés de commerce dont le salaire annuel est inférieur à 2000 marks. L'assurance est obligatoire, mais le choix de la caisse d'assurance est laissé à l'intéressé : ces caisses sont municipales, patronales, professionnelles ou libres. Dans tous les cas, un tiers des primes est laissé à la charge du patron. Cette obligation, purement forfaitaire, trouve son explication dans l'existence des maladies dites professionnelles qui engagent la res-

ponsabilité du patron au même titre que l'accident professionnel.

En France, aucune loi n'a, jusqu'à ce jour, consacré le principe de la responsabilité patronale en matière de maladie ne résultant pas d'un accident nettement caractérisé. Le législateur s'est surtout préoccupé de la prévention des maladies professionnelles. Les inspecteurs du travail sont chargés de veiller à l'application des lois d'hygiène sociale et de protection des travailleurs; l'atelier devient de plus en plus salubre, et la maladie professionnelle perd de jour en jour du terrain.

Le soin d'assurer contre la maladie est donc entièrement laissé aux Sociétés de secours mutuels[1]. On sait comment opèrent ces sociétés. Leurs procédés sont empiriques, et leurs calculs ne sont en général basés sur aucun principe mathématique. Elles exigent de chacun des sociétaires une cotisation uniforme, indépendante de l'âge de l'assuré. Ces cotisations sont généralement payables mensuellement; elles sont d'ailleurs peu élevées, car l'accès de la Société doit être facilité surtout à la masse des travailleurs, salariés à la journée, chez qui la maladie, en supprimant le gain

[1] Certains auteurs prétendent que seules les sociétés de secours mutuels sont aptes à pratiquer l'assurance contre la maladie. Cf. Prosper de Laffitte : « Nous avons la Caisse nationale des retraites, nous avons les Compagnies d'assurances sur la vie, d'autres assurent contre les accidents, mais la société de secours mutuels semble pouvoir seule assurer ses membres contre le risque de maladie, parce que seule elle peut exercer la surveillance indispensable, en lui conservant un caractère amical et familial... C'est l'assurance contre le risque de maladie qui est l'assurance fondamentale chez les sociétés de secours mutuels, celle à laquelle il faut subordonner toutes les autres. »

quotidien, amène la misère et peut-être la mort, faute de soins médicaux trop coûteux. Si la cotisation est trop élevée, la classe des travailleurs s'éloignera de la Société qui aura totalement manqué son but.

Ces sommes minimes capitalisées suffiraient à peine à payer les frais de maladie. Cependant les Sociétés de secours mutuels ont d'autres ambitions. Elles fournissent à leurs membres malades une indemnité journalière. Elles veulent pourvoir en outre à une foule d'autres frais. Elles ont le désir de fonctionner comme caisses d'assurance au décès et comme caisses de retraites; elles promettent une retraite de vieillesse à leurs membres âgés et une retraite d'invalidité à leurs membres infirmes. Malgré le peu d'importance des secours alloués, la Société ne parvient à satisfaire aux obligations multiples qu'elle s'impose que grâce aux versements des membres honoraires et bienfaiteurs, aux subventions de l'État et à la bonification d'intérêts que ce dernier veut bien consentir. L'assistance vient en somme compléter et rendre efficace l'œuvre de la prévoyance.

Dans ces conditions, le principe de l'assistance étant admis, la détermination exacte des cotisations à verser par chacun des sociétaires, en tenant compte de toutes les causes qui peuvent avoir une influence sur leur morbidité, ne paraît plus aussi indispensable que si la Société tirait d'elle seule toutes ses ressources. Il serait nécessaire alors de procéder à une répartition équitable des indemnités et de soumettre la question au calcul, en se basant sur les statistiques et en utilisant les tables de morbidité qui en traduisent d'une façon pratique les résultats.

D'ailleurs, la Société de secours mutuels ne s'adresse guère qu'à la classe ouvrière et aux petits employés; les secours qu'elle accorde sont assez minimes. Mais on peut concevoir que la nécessité de l'assurance contre la maladie se fasse sentir pour le commerçant, l'industriel, dont le chiffre d'affaires diminue très sensiblement pendant le cours de la maladie qui les frappe, et qui désireraient voir cette perte compensée par une indemnité convenable; pour le salarié, dont les appointements dépendent du travail qu'il produit ou des affaires qu'il fait, et qui voudrait s'assurer pendant une période de maladie les mêmes ressources qu'en temps normal. La réparation devrait être alors à peu près équivalente au préjudice causé, et l'obligation s'imposerait, pour la Société qui pratiquerait un tel mode d'assurance, de calculer les primes d'une façon rationnelle.

Statistiques; table de Hubbard. — Les statistiques de morbidité sont très difficiles à établir, car il faut tenir compte d'une foule de causes, beaucoup plus nombreuses et plus efficaces encore que celles qui influent sur la mortalité. Aussi, peu de statistiques ont-elles été publiées, et cela tient surtout à ce que ce ne sont pas des Compagnies à primes fixes qui ont pratiqué l'assurance contre la maladie, mais des Sociétés de secours mutuels, et on ne peut obtenir que difficilement de telles sociétés des renseignements suffisants pour l'établissement de bonnes statistiques. Ces sociétés, en effet, sont en général à effectif assez faible; elles sont très disséminées sur le territoire. On peut évaluer leur nombre actuel à 20000 environ avec un

effectif de 4000000 de membres[1], ce qui fait une moyenne de 200 personnes par société, et encore, les sociétés étant plutôt régionales que professionnelles, cet effectif comprend-il des membres exposés aux risques les plus divers. Les meilleurs renseignements peuvent être fournis par les sociétés professionnelles, comme la « Fraternelle des employés et ouvriers des chemins de fer français », qui compte environ 115000 membres, ou par les Unions de sociétés qui peuvent créer un service chargé de recueillir et grouper les données fournies par chacune des sociétés composantes.

Cependant, l'article 36 de la loi du 1er avril 1898 prescrit l'établissement de tables de morbidité applicables aux sociétés de secours mutuels; et une commission a été chargée de la construction de ces tables. Cette commission a fait appel aux sociétés; mais les données statistiques recueillies ne sont pas encore suffisantes, les années d'observation sont encore trop peu nombreuses, et aucun travail n'a, jusqu'à ce jour, été publié.

On ne possède guère en France que la table de morbidité de M. Hubbard, qui a été dressée en 1852 et qui était déduite de l'observation de 25 sociétés de secours mutuels de 1835 à 1849. Cette table est relative à l'ensemble de la clientèle des sociétés observées et ne peut donner qu'une moyenne approximative de la morbidité générale de cette clientèle. Elle indique, pour chaque âge, le nombre moyen de jours de maladie annuel.

La table de Hubbard a été complétée et ajustée par

[1] Y compris les mutualités scolaires.

M. P. de Laffitte, qui l'a publiée dans son *Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels,* le plus remarquable ouvrage qui ait paru sur la question[1]. Nous reproduisons cette table à la page suivante.

Nous nous bornerons à exposer brièvement quelles sont les influences diverses qui agissent sur la morbidité et dont il faut tenir compte dans l'établissement d'une statistique ; nous indiquerons ensuite comment peuvent être conduits les calculs des primes d'assurance contre la maladie.

Influence des divers facteurs qui agissent sur la morbidité. Age. — L'âge a évidemment une grande influence sur l'état de santé général. Les forces s'affaiblissent graduellement, et le nombre annuel moyen des jours de maladie doit augmenter d'une façon corrélative. C'est ce qu'indique la table de Hubbard. Le nombre moyen qui est de quatre jours et demi par an à 21 ans, passe à près de huit jours à 55 ans et à plus de vingt et un à 73 ans. Les têtes âgées coûtent donc plus cher à la société de secours mutuels que les têtes jeunes. Cependant, pour une tête donnée, la cotisation est d'ordinaire uniforme pendant toute la durée de sociétariat. Il est alors nécessaire d'adopter un système analogue à celui auquel on a été conduit pour les assurances viagères, et de faire payer aux têtes jeunes une cotisation trop forte dont l'excédent sera mis en réserve pour les années de vieillesse.

[1] Gauthier-Villars et fils, éditeurs, 55, quai des Grands-Augustins. Ouvrage couronné par l'Académie des sciences, prix Leconte, 1890.

AGES	NOMBRES MOYENS DE JOURNÉES DE MALADIE	AGES	NOMBRES MOYENS DE JOURNÉES DE MALADIE	AGES	NOMBRES MOYENS DE JOURNÉES DE MALADIE	AGES	NOMBRES MOYENS DE JOURNÉES DE MALADIE	AGES	NOMBRES MOYENS DE JOURNÉES DE MALADIE
ans 16	4,000	ans 28	5,551	ans 40	5,960	ans 52	7,147	ans 64	14,172
17	4,065	29	5,556	41	6,160	53	7,178	65	14,736
18	4,140	30	5,562	42	6,340	54	7,212	66	15,164
19	4,250	31	5,569	43	6,500	55	7,596	67	15,428
20	4,365	32	5,576	44	6,784	56	8,124	68	15,500
21	4,495	33	5,584	45	6,952	57	8,768	69	16,188
22	4,604	34	5,593	46	7,028	58	9,500	70	17,084
23	5,000	35	5,607	47	7,041	59	10,748	71	18,236
24	5,276	36	5,623	48	7,056	60	11,724	72	19,692
25	5,448	37	5,642	49	7,074	61	12,476	73	21,500
26	5,532	38	5,689	50	7,095	62	13,052		
27	5,544	39	5,740	51	7,120	63	13,500		

En tous cas, une tête entrée tardivement dans la société doit verser une cotisation annuelle plus forte qu'une tête entrée jeune. Cependant certaines sociétés de secours mutuels ne font aucune distinction entre les unes et les autres; elles se contentent de fixer une limite d'âge maxima au delà de laquelle nul ne peut plus être admis, mais la cotisation est uniforme, quel que soit l'âge à l'entrée. En général, les sociétés qui opèrent ainsi réparent, au moins en partie, l'injustice commise, en exigeant des personnes âgées un droit d'entrée plus élevé que des personnes jeunes.

Sexe. — Le sexe influe notablement plus sur la morbidité que sur la mortalité. Les femmes sont en effet sujettes à un plus grand nombre de maladies que les hommes, et les accouchements, par leurs conséquences immédiates ou lointaines, doivent augmenter considérablement le taux de morbidité des femmes. Cependant les statistiques établies jusqu'à présent n'ont pas distingué les sexes, et on ne possède pas encore de données précises à cet égard. D'ailleurs, il y a en somme assez peu de sociétés de secours mutels admettant les femmes.

Profession. — S'il est une cause dont l'influence se fasse particulièrement sentir sur la morbidité, c'est bien la profession. Sans parler des accidents qui peuvent résulter de l'emploi de machines, d'outils ou d'installations spéciales et qui constituent le risque professionnel, il existe des maladies professionnelles résultant de l'emploi journalier de substances vénéneuses ou de la répétition trop fréquente de besognes nuisibles à

certains organes ou à l'organisme en général. Ainsi chacun sait que les peintres, les plombiers, sont exposés à l'intoxication saturnine, que les ouvriers qui manipulent le phosphore peuvent être atteints de nécrose, que les verriers sont particulièrement sujets à la tuberculose. La statistique devra donc distinguer dans le nombre total annuel des jours de maladie la part qui revient à la profession elle-même, ou, si l'on veut, étant donnée une statistique relative à la population générale, il faudra ajouter à chaque nombre fourni par cette statistique un certain nombre de jours de maladie provenant exclusivement de la profession de chacune des têtes étudiées. M. Razous, dans son *Étude sur la mortalité et la morbidité des professions dangereuses*[1], a indiqué le moyen d'obtenir des statistiques satisfaisantes et a appliqué au cas de quelques professions les méthodes qu'il préconise.

Climat. Localité. — Il faut tenir compte, dans la sélection nécessaire à l'établissement d'une table, des conditions de site et de milieu auxquelles sont soumises les têtes en observation. Sans vouloir faire allusion aux voyages lointains, et en supposant qu'il ne s'agisse d'établir que des tables applicables aux diverses régions françaises, il n'en est pas moins certain que, du nord au midi de la France, les conditions de climat et d'existence varient suffisamment pour exercer une influence sur la santé des gens qui se déplacent d'une région à l'autre.

De plus, certaines contrées sont plus malsaines que

[1] B. Defond, éditeur, 22, rue des Écoles, 1904.

d'autres, le voisinage d'étangs est l'origine de fièvres paludéennes, les localités sises dans les bas-fonds sont plus humides et moins aérées que celles qui sont situées sur une hauteur, et il n'est pas rare de voir deux villages voisins, dont l'un est visité périodiquement par les maladies épidémiques (variole, fièvre typhoïde, etc.), tandis que les habitants de l'autre semblent être complètement immunisés contre ces maladies.

Les statistiques devront donc être non seulement professionnelles, mais régionales et même locales. Cependant on sait que plus le champ d'observation se restreint, moins la statistique donne de résultats pratiquement utilisables et de renseignement certains. Aussi, de même qu'on pourra grouper ensemble les professions similaires et présentant un risque de morbidité comparable, on pourra réunir les localités et même les régions en groupes, d'après les résultats acquis, de façon à obtenir un matériel statistique utilisable.

Hygiène. — Nous savons que la mortalité varie avec les époques et que la durée moyenne de la vie humaine a augmenté sensiblement depuis quelques siècles, grâce au développement de l'hygiène sociale. La même cause a pour effet de diminuer la morbidité dans des proportions plus grandes encore. La prophylaxie des maladies contagieuses, la désinfection et l'isolement des malades, la lutte contre les maladies dites évitables, les mesures législatives et sociales destinées à enrayer les fléaux modernes, tels que les intoxications lentes par l'alcool, la morphine, etc., tendent à restreindre considérablement le nombre et la durée des maladies.

Tant d'efforts généreux ne peuvent rester improductifs, et il est à prévoir que les statistiques établies à très peu d'années d'intervalle donneront des résultats de plus en plus satisfaisants. Quand les progrès accomplis en ce sens seront suffisants, peut-être la morbidité de têtes sélectionnées convenablement deviendra-t-elle un risque assurable au même titre que l'invalidité accidentelle ou sénile et la mort ; la fréquence des maladies et leur durée étant moindres, les primes deviendront abordables aux bourses moyennes.

Autres causes. — Il serait nécessaire aussi de tenir compte d'une foule d'autres causes très difficiles à rechercher. Combien de maladies ne sont-elles pas transmissibles par hérédité ? Combien ne sont pas dues aux conditions d'existence, aux intoxications volontaires, à l'alimentation mal comprise, à l'existence mal ordonnée, au surmenage dans un domaine quelconque ? Ces causes sont en général inconnues du statisticien.

Une Compagnie d'assurances pourrait, au moyen d'une visite médicale passée au moment de l'entrée, opérer une sélection et éliminer les risques trop mauvais. Une société de secours mutuels ne peut le faire efficacement. D'ailleurs, nous l'avons dit, les sociétés de secours mutuels se soutiennent par l'assistance, et peuvent-elles empêcher de venir à elles pour prendre leur part des bienfaits de l'assistance les têtes victimes d'une hérédité fâcheuse et qui sont souvent les plus intéressantes ?

On le voit, une foule de causes interviennent pour modifier la morbidité, et il n'est pas possible d'en tenir compte d'une façon absolue dans la statistique. Mais

pratiquement, on se contentera de faire intervenir quatre éléments principaux : l'âge, le sexe, la profession, la région. On déterminera, dans le nombre total de jours de maladie pour chaque profession, la part qui revient à la profession elle-même, et on classera ensemble les professions dans lesquelles ce risque est comparable. Enfin les régions seront groupées d'après les résultats obtenus. On aura ainsi un certain nombre, aussi restreint que possible, de classes de professions et de groupes de régions, et on peut admettre que les travailleurs d'une même classe et d'un même groupe peuvent être considérés comme soumis à des risques à peu près identiques.

Tables de morbidité. — Les résultats statistiques étant obtenus, il reste à les rassembler en une table de façon à pouvoir les utiliser. On construira donc, à l'exemple de Hubbard, une table donnant à chaque âge le nombre moyen de jours de maladie, quantité que l'on peut désigner sous le nom de taux annuel de morbidité. Si n_x est le nombre des jours de maladie d'un groupe de v_x personnes d'âge x, le taux de morbidité annuel correspondant à cet âge sera :

$$\mu_x = \frac{n_x}{v_x}.$$

Le nombre n_x est assez difficile à déterminer exactement. Il est en effet souvent peu commode de savoir au juste quand a commencé une maladie et quand elle a pris fin. Dans ce nombre n_x on pourra faire rentrer tous les jours de maladie sans exception, qu'il s'agisse d'accidents professionnels ou d'affections quelconques.

Quand il s'agira d'un traumatisme, d'un accident au sens de la loi du 9 avril 1898, le nombre de jours devra s'entendre de la durée totale du traitement jusqu'à la consolidation de la blessure, c'est-à-dire jusqu'à la guérison finale ou l'invalidité permanente définitive.

Chaque classe de professions donnera lieu par groupe de régions, pour les personnes d'un même sexe, à l'établissement d'une table qui indiquera à chaque âge le taux de morbidité correspondant. Ces tables pourront être représentées par des courbes et ajustées par un procédé graphique comme les courbes de mortalité. On portera en abscisses les âges et en ordonnées les taux de morbidité.

On peut essayer d'ajuster les tables de morbidité par un procédé analytique, en cherchant à déterminer les coefficients d'une équation de morbidité, donnant le taux en fonction de l'âge, et applicable pendant des périodes aussi longues que possible. Il était naturel, à cause de l'analogie des courbes de morbidité et de mortalité, de songer à choisir la forme exponentielle. Aussi quelques auteurs ont-ils proposé des équations de la forme : $\mu_x = \frac{AB^x}{v_x}$ ou $\mu_x = \frac{C + AB^x}{v_x}$,

A, B et C étant des constantes convenablement déterminées ou moyen des éléments de la table considérée. A, B et C dépendent donc de la profession, du sexe, de la région.

Calcul des primes. Commutations. — Sup-

posons établie et ajustée une table donnant à chaque âge le taux de morbidité d'une catégorie de têtes déterminée, et considérons une personne d'âge x qui désire s'assurer contre la maladie. Calculons la valeur de la prime unique qu'elle devra payer au moment de la conclusion du contrat.

Elle aura, selon toute probabilité, à subir, pendant le cours de sa x^e année d'age, qui coïncidera avec la première année d'assurance, μ_x jours de maladie :

$$\mu_x = \frac{n_x}{v_x}.$$

Si chaque journée de maladie coûte un franc, et si, par une hypothèse analogue à celle que nous avons faite pour la détermination de la prime d'assurance sur la vie, nous ramenons tous les payements à être effectués au milieu de l'année, la tête considérée touchera μ_x francs à cette époque, et la valeur actuelle de cette somme au début de l'année est :

$$\mu_x (1 + i)^{-\frac{1}{2}}$$

en désignant, comme d'habitude, par i le taux d'intérêt.

Cette même tête coûtera à la Société l'année suivante, si elle n'est pas décédée au moment où elle atteint sa $(x + 1)^e$ année d'âge, une somme égale à μ_{x+1} francs. La valeur actuelle, au début de l'assurance, de cette somme à payer éventuellement au milieu de la deuxième année est :

$$\frac{v_{x+1}}{v_x} \mu_{x+1}(1 + i)^{-\frac{3}{2}},$$

ou, en conservant les notations habituelles :

$$\left[P_x^n = \frac{v_{x+n}}{v_x}(1+i)^{-n}\right]$$

$$P_x^1 \mu_{x+1}(1+i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Et ainsi de suite. La valeur actuelle de la somme μ_{x+k} à payer au milieu de la $(k+1)^e$ année d'assurance, si l'assuré atteint sa $(x+k)^e$ année d'âge, est :

$$P_x^k \mu_{x+k}(1+i)^{-\frac{1}{2}}.$$

La prime unique cherchée a donc pour valeur :

$$\Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[\mu_x + \mu_{x+1} P_x^1 + \mu_{x+2} P_x^2 + \ldots + \mu_\omega P_x^{\omega-x}\right] \quad (1)$$

en désignant par ω l'âge extrême de la table.

On peut construire des tables de commutations donnant les quantités telles que :

$$\delta_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}} \mu_x D_x,$$

et :

$$\Delta_x = \Sigma_x^\omega \delta_x.$$

La prime unique Π est alors donnée par la relation :

$$\Pi_x = \frac{\Delta_x}{D_x}.$$

Le tour de raisonnement suivant conduit au même résultat :

Supposons que les v_x têtes versent chacune en entrant dans l'assurance une prime unique égale à Π_x. La somme totale $v_x \Pi_x$ doit être suffisante pour garantir le payement d'indemnités successives égales à :

n_x francs payables au milieu de la première année,

puisque le nombre total des jours de maladie des têtes du groupe sera n_x;

n_{x+1} francs payables au milieu de la deuxième année,

. . . .

n_{x+k} francs payables au milieu de la k^e année, etc.

En écrivant que la valeur actuelle de ces divers payements est égale à $v_x \Pi_x$, on obtient :

$$v_x \Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}} [n_x + n_{x+1}(1+i)^{-1} + \ldots + n_\omega (1+i)^{-(\omega - x)}] \quad (2)$$

relation qu'on peut transformer ainsi :

$$\Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{n_x}{v_x} + \frac{n_{x+1}}{v_{x+1}} \frac{v_{x+1}}{v_x} (1+i)^{-1} + \ldots + \frac{n_\omega}{v_\omega} \frac{v_\omega}{v_x} (1+i)^{-(\omega - x)} \right]. \quad (2')$$

Sous cette forme, on aperçoit l'identité des relations (1) et (2).

Si l'équation de morbidité suivante :

$$\mu_x = \frac{\alpha + \beta \gamma^x}{v_x}$$

peut être admise, la valeur de la prime unique Π s'exprime simplement en fonction de l'âge. La relation (2) s'écrit en effet :

$$v_x \Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}} [\alpha + \beta\gamma^x + (\alpha + \beta\gamma^{x+1})(1+i)^{-1} + \ldots + (\alpha + \beta\gamma^\omega)(1+i)^{-(\omega - x)}].$$

$$v_x \Pi_x = (1+i)^{-\frac{1}{2}} \alpha \left[1 + \frac{1-(1+i)^{-(\omega-x)}}{i} \right]$$

$$+ (1+i)^{-\frac{1}{2}} \beta \gamma^x \frac{\left(\frac{\gamma}{1+i}\right)^{\omega-x+1} - 1}{\frac{\gamma}{1+i} - 1}.$$

$$\Pi_x = \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}}}{v_x} \alpha \left[\frac{1-(1+i)^{-(\omega-x+1)}}{i} \right]$$

$$+ \frac{(1+i)^{-\frac{1}{2}}}{v_x} \beta \gamma^x \frac{\left(\frac{\gamma}{1+i}\right)^{\omega-x+1} - 1}{\frac{\gamma}{1+i} - 1}.$$

La prime unique étant déterminée, la prime annuelle constante ϖ_x s'en déduit comme dans le cas des assurances sur la vie. Si la prime annuelle est payable d'avance pendant toute la durée de la vie de l'assuré, sa valeur est : $\varpi_x = \frac{\Pi_x}{1+a_x} = \frac{\Delta_x}{N_x}$. (3)

Si les primes annuelles constantes sont payables seulement jusqu'à un certain âge y, leur valeur sera :

$$\varpi_x = \frac{\Delta_x}{N_x - N_y}.$$

Enfin ces primes peuvent être stipulées payables seulement pendant la durée de validité de la personne assurée. Si elle devient invalide, elle bénéficie des indemnités servies par la caisse d'assurance contre la maladie pendant la durée du traitement, et reçoit ensuite une rente d'invalidité si elle est assurée contre ce risque, mais cesse de payer ses primes d'assurance morbidité. Il faut, dans l'expression (3), rempla-

cer a_x par l'annuité viagère a'_x relative aux têtes valides :

$$a'_x = P'^1_x + P'^2_x + \ldots = p'^1_x (1+i)^{-1} + p'^2_x (1+i)^{-2} + \ldots$$

Les quantités p' sont calculées au moyen de la table des valides.

L'assurance contre la maladie peut être temporaire. Si elle doit s'étendre entre les âges x et y, la prime unique est :

$$\Pi = (1+i)^{-\frac{1}{2}} \left[\mu_x + \mu_{x+1} P^1_x + \ldots + \mu_y P^{y-x}_x \right]$$

$$= \frac{\Delta_x - \Delta_y}{D_x},$$

et la prime annuelle payable pendant le même temps :

$$\varpi = \frac{\Delta_x - \Delta_y}{N_x - N_y} .$$

Si les cotisations sont trimestrielles ou mensuelles au lieu d'être annuelles, on substitue dans les relations précédentes les annuités fractionnées aux annuités ordinaires : $_ka_x = a_x + \frac{k-1}{2k} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{k-1}{2k}$,

$$\frac{1}{k} + {}_ka_x = a_x + \frac{k+1}{2k} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{k+1}{2k} .$$

L'assurance contre la maladie comporte généralement le paiement de frais médicaux, pharmaceutiques et d'hospitalisation et le payement d'une indemnité journalière. La statistique permettra de déterminer le coût moyen d'une journée de maladie au point de vue des frais divers que comporte la cure, et on pourra admettre que chaque malade coûtera à la société une somme journalière constante k pour frais de médecin

et de pharmacien. L'indemnité journalière à verser à l'assuré j sera variable et dépendra des conditions du contrat. La prime unique à payer Π_x à l'âge x sera donc égale à : $\Pi_x = (k + j) \frac{\Delta_x}{D_x}$,

et la prime annuelle, constante et viagère .

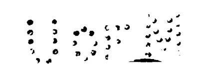
$$\varpi_x = (k + j) \frac{\Delta_x}{N_x}.$$

Les primes ainsi calculées sont des primes pures. Il faudrait les charger convenablement pour tenir compte des frais d'administration, de gestion, d'acquisition, et surtout des éventualités fâcheuses qui peuvent intervenir pour augmenter considérablement et brusquement le taux de morbidité. En effet, la morbidité sera certainement soumise à des variations, dues aux épidémies, beaucoup plus fréquentes et plus sensibles que la mortalité.

Enfin, le système des primes annuelles constantes exige la constitution de réserves mathématiques qui conservent le même sens et ont le même but que dans le cas des assurances sur la vie.

B. — ASSURANCE COMPLÉMENTAIRE DE L'ASSURANCE SUR LA VIE

Un certain nombre de Compagnies d'assurances contre les accidents et sur la vie ont inauguré depuis quelques



années une combinaison fort intéressante qui participe à la fois de l'assurance contre l'invalidité et de l'assurance contre la maladie.

Il peut arriver que le souscripteur d'un contrat viager à primes annuelles tombe malade ou soit victime d'un accident qui entraîne pour lui une longue période d'incapacité de travail. Pendant ce temps, ses ressources peuvent diminuer considérablement et même totalement disparaître : il se trouve alors dans l'impossibilité de payer les primes de son contrat qu'il voit annuler ou réduire. Il perd ainsi d'un seul coup, par le fait d'un événement fâcheux et imprévu, le bénéfice qu'il était en droit d'attendre de son acte de prévoyance.

L'assurance complémentaire lui donne le moyen de ne pas voir compromettre, par l'effet d'un hasard malheureux, des résultats souvent péniblement acquis. Moyennant le payement d'une prime généralement peu élevée, payable seulement tant qu'il est en bonne santé et valide, le titulaire d'un contrat viager est exonéré du payement de ses primes d'assurances sur la vie dès qu'il est atteint d'une maladie entraînant pour lui une incapacité complète de travail d'une certaine durée (généralement supérieure à 45 jours). Les primes ou portions de primes vie correspondant à toute la période d'incapacité lui sont versées directement ou sont versées à la caisse de la Compagnie d'assurances sur la vie, et les primes de l'assurance complémentaire cessent d'être dues.

Quand un capital est payable au décès de l'assuré, ce capital devient, en vertu de l'assurance complémentaire, payable par anticipation lorsque l'assuré se trouve

atteint, par suite d'accident ou de maladie, d'une incapacité complète et permanente de travail. Ce payement est effectué au bout d'une période suffisante pour bien mettre en évidence le caractère définitif de l'invalidité. Si, en particulier, l'invalidité résulte d'un accident et devient immédiatement définitive (perte de deux membres par exemple), le capital est versé aussitôt [1]. Enfin on peut substituer à ce versement anticipé le service d'une rente pendant toute la durée de l'invalidité totale, représentant l'intérêt, à un taux déterminé à l'avance, du capital assuré. La combinaison ne peut s'appliquer qu'au cas où il y a un capital payable au décès de l'assuré : vie entière, mixte, terme fixe, combinée, etc. Le versement anticipé a naturellement pour effet de substituer la Compagnie qui a consenti l'assurance complémentaire au bénéficiaire initial de la police vie, dont les primes continuent à être acquittées par les soins de la Compagnie susvisée. Cette dernière se borne donc à avancer le capital qui lui sera remboursé au terme du contrat primitif.

La détermination rationnelle des primes de l'assurance complémentaire serait assez compliquée, à cause du grand nombre d'éléments divers qu'il faudrait faire entrer dans le calcul [2] : âge, capital assuré, prime vie,

[1] « Le bénéficiaire et sa famille reçoivent ainsi, au moment le plus opportun, la somme susceptible de leur épargner de graves embarras, et ils en jouissent bien des années peut-être avant le décès de l'assuré ou le terme fixé dans le contrat d'assurance sur la vie. » (*La Prévoyance.*)

[2] Il faut distinguer dans la prime deux parties : la première partie est la prime d'une assurance contre la maladie, de durée égale à celle de la police vie : l'indemnité mensuelle qui doit être servie est égale au douzième de la prime d'assurance sur la

probabilité d'invalidité totale temporaire ou permanente due à la maladie ou aux accidents, etc. En l'absence de données certaines et de statistiques d'invalidité et de morbidité convenables, les Compagnies se contentent de fixer la prime complémentaire à raison d'un tant pour cent de la prime vie, ce tant pour cent dépendant à la fois de la profession de l'assuré, de la nature du contrat et de sa durée.

Bien que peu répandue à l'heure actuelle, cette intéressante combinaison méritait une mention spéciale à deux points de vue distincts : d'une part, il est désirable de voir ce complément de sécurité s'ajouter à toutes les polices d'assurances sur la vie, et d'autre part, il est à noter que c'est la seule assurance contre la maladie qui soit, à l'heure actuelle, pratiquée en France par des Compagnies à primes fixes.

vie ; la deuxième partie est la prime d'une rente d'invalidité (Voir plus loin, page 345) égale à la prime Vie augmentée de l'intérêt, au taux adopté, du capital assuré, et servie à partir du moment où l'invalidité devient définitive jusqu'au terme du contrat d'assurance sur la vie. Les deux assurances (maladie et morbidité) ne se superposent pas d'ailleurs, l'effet de la première cesse quand la seconde entre en jeu, et la prime totale de l'assurance complémentaire n'est plus payée dès qu'un des deux risques se réalise.

CHAPITRE II

ASSURANCE CONTRE L'INVALIDITÉ

C. — GÉNÉRALITÉS

L'invalidité est produite par trois causes différentes : la maladie, les accidents, la sénilité.

Maladie. — La maladie qui, pendant sa durée, peut faire l'objet, comme on l'a vu plus haut, d'une assurance spéciale, entraîne parfois comme conséquence une incapacité permanente totale ou partielle de travail, incapacité qui se traduit par une diminution plus ou moins importante du salaire de la victime. Ainsi une attaque de rhumatisme peut entraîner une certaine raideur des articulations, préjudiciable à l'exercice de la profession habituelle. Or, bien qu'il y ait là véritablement un dommage pour l'intéressé, il est souvent bien difficile d'évaluer ce dommage tant qu'il n'atteint pas une certaine importance. La simulation est en effet fort à craindre, et si l'on assurait contre l'invalidité partielle permanente ayant pour cause la maladie, il serait souvent trop facile à l'assuré de se faire attribuer des rentes de faible importance ou des capitaux d'invalidité équivalents à ces rentes. D'ailleurs on peut remarquer qu'il est rare qu'une impotence

fonctionnelle de faible importance et non susceptible d'amélioration soit la conséquence d'une maladie.

Ainsi on voit fréquemment un accident causer la perte d'un doigt, de deux doigts. L'infirmité qui en résulte est évidente et permanente; il sera facile d'en faire l'estimation et de calculer la rente viagère qui constituera la réparation du dommage causé. La maladie au contraire détermine la plupart du temps, quand elle est incurable, un état d'incapacité de travail voisin de l'incapacité absolue (paralysie, diathèses prononcées, au dernier terme de leur évolution), et il est tout à fait exceptionnel de voir une incapacité permanente de très faible importance résulter d'une maladie: une telle incapacité est généralement susceptible d'amélioration et ne cause pas une diminution de salaire appréciable.

Accidents. — Les accidents qui peuvent atteindre le travailleur sont de deux sortes: ceux qui surviennent en dehors du travail professionnel et ceux qui résultent au contraire du travail professionnel et dont les conséquences sont aujourd'hui réparées *obligatoirement* dans presque toutes les nations européennes. Ces derniers seront étudiés au chapitre suivant; quant aux premiers, ils peuvent entraîner une incapacité permanente, partielle ou totale de travail. On pourrait, au moyen d'une analyse semblable à celle qui sera faite plus loin à propos des accidents du travail, calculer les primes d'assurances collectives contre les accidents survenus en dehors du travail, à la condition de construire préalablement des tables convenables.

Mais si l'on voulait créer des assurances individuelles contre ce risque, la question deviendrait

rapidement plus compliquée, en raison de la multiplicité des degrés d'invalidité qui peuvent être observés et qui seraient tous indemnisables. Il serait nécessaire de construire des tables spéciales pour chacun de ces degrés et de tenir compte, dans le calcul de la prime, des probabilités que l'on a d'être atteint de chacune de ces invalidités partielles. Il faudrait en outre déterminer à quel moment, pour quel degré d'invalidité permanente, cesserait le payement des primes d'assurance et commencerait le service de la rente. Il y aurait forcément un degré d'invalidité tel que l'assuré, ne payant plus de primes, n'aurait cependant droit à aucune indemnité, situation bizarre et anormale.

Sénilité. — Les forces du travailleur diminuent progressivement à partir d'un certain âge, et l'incapacité sénile qui en résulte est un des risques qui effrayent le plus l'ouvrier. Que deviendra-t-il, en effet, s'il n'a pas su ou s'il n'a pas pu se ménager des ressources suffisantes pour l'époque où tout travail lui sera rendu impossible? Il n'aura échappé à la mort prématurée que pour se trouver en proie à la misère. Aussi, depuis longtemps, on s'est préoccupé d'instituer des retraites pour la vieillesse, et dans presque tous les pays s'est posé le problème des retraites ouvrières.

Organisations existantes. — Or, à l'heure actuelle, quels sont les divers modes d'assurance qui existent en France contre les risques d'invalidité dont l'énumération précède?

Les conséquences des accidents du travail sont mis, par la loi de 1898, à la charge des patrons qui, pour être débarrassés de ce soin, peuvent assurer collectivement leurs ouvriers ou employés.

L'assurance individuelle contre les accidents quels qu'ils soient, assurance dont il sera dit quelques mots à la fin de ce volume, se charge de réparer, d'après des bases forfaitaires et librement débattues entre les deux parties contractantes, les conséquences des accidents qui peuvent atteindre les assurés, dans l'exercice ou non de leur profession. Cette assurance, complètement à la charge de l'intéressé, peut faire, comme on le prévoit, double emploi avec l'assurance contre les accidents du travail. D'autre part, elle n'a pas la prétention de réparer exactement le dommage causé, d'après des bases bien définies, telles que le salaire au moment de l'accident; la réparation est purement forfaitaire et laisse le champ ouvert à toutes celles qui, en raison des circonstances de l'accident, peuvent être poursuivies.

Enfin, l'assurance contre l'invalidité prématurée occasionnée par la maladie ou les accidents et l'assurance contre l'invalidité sénile font l'objet d'institutions spéciales : sociétés de secours mutuels, caisses professionnelles, caisses de retraites, qui, il faut bien le reconnaître, laissent encore à l'heure actuelle, en dehors d'elles, la grande majorité des travailleurs et ne donnent souvent que des réparations insuffisantes, hors de proportion avec le préjudice causé. Il n'y a guère que la grande industrie, telle que l'industrie minière ou celle des transports (chemins de fer), qui protège efficacement ses ouvriers et employés contre ce risque.

un des plus intéressants cependant à considérer au point de vue social.

En somme, on peut dire que, si l'on excepte certains corps de métiers trop rares, l'assurance contre l'invalidité n'est pas organisée d'une façon rationnelle en France. Il n'en est pas de même à l'étranger, en Allemagne notamment, où la loi du 22 juin 1889 a rendu l'assurance contre l'invalidité obligatoire pour tous les salariés âgés de plus de seize ans dont le salaire est inférieur à 2000 marks. Les cotisations sont pour moitié à la charge des patrons et pour moitié à la charge des ouvriers. De plus, l'État contribue pour une somme de 50 marks à chaque pension. Les caisses d'assurance contre l'invalidité forment des circonscriptions territoriales et sont organisées par grandes régions, ordinairement par provinces. Tandis qu'en France, les caisses professionnelles (mines, chemins de fer) sont surtout des institutions de retraites, leur objet principal étant d'assurer une pension à l'ouvrier âgé, en Allemagne et en Autriche, au contraire, la vieillesse n'est considérée que comme un cas particulier de l'invalidité, et le véritable but des caisses de ce genre (par exemple, les Knappschaftsvereine) est de servir, non des retraites d'âge, mais des pensions d'invalidité prématurée. L'âge limite de validité y est d'ailleurs assez élevé : 70 ans.

L'assurance contre l'invalidité pourrait être comprise de la façon suivante :

Serait considéré comme titulaire d'une pension d'invalidité tout travailleur atteint d'une infirmité, quelle qu'en soit d'ailleurs la cause : maladie, accident, vieillesse, qui ne lui permet plus de dépasser un certain

minimum de salaire, fixé à l'avance par profession[1]. Chaque invalide recevrait soit une pension viagère fixe, déterminée préalablement, d'après les circonstances locales, la profession, le salaire des ouvriers valides, etc., soit un capital d'invalidité qui pourrait être transformé en une rente viagère réversible sur la tête du conjoint.

Les charges de l'assurance (cotisations ou primes) seraient réparties entre le patron, l'État et la population ouvrière elle-même. Cette assurance se combinerait avec l'assurance contre les accidents du travail, de façon que la rente de l'invalide total ne puisse dépasser la pension fixée à l'avance pour la catégorie considérée.

Cette réparation serait plus humanitaire et plus complète que la seule réparation des accidents du travail, elle ne pèserait pas beaucoup plus sur l'industrie, à la condition d'en mettre une partie à la charge de la classe ouvrière elle-même; enfin, dans chaque groupe d'industries, les charges seraient comparables. En effet, pour les professions dangereuses, les rentes d'invalidité prématurée seraient plus fréquentes; mais les rentes de vieillesse seraient plus rares et servies moins longtemps que pour les professions très peu exposées et sans maladies professionnelles.

[1] Pour chaque profession, on déterminerait un âge limite au delà duquel tout travailleur serait considéré comme invalide et toucherait une pension de retraite.

D. — STATISTIQUES

Tables d'invalidité existantes. — C'est en Allemagne et en Autriche qu'ont été dressées les premières statistiques concernant le risque d'invalidité en général. Ces statistiques ont été dressées par professions. Les plus intéressantes sont évidemment celles qui ont eu pour origine les observations recueillies par les corps de métiers qui occupent le plus grand nombre d'ouvriers, comme les mines et les chemins de fer. M. Weber, dans sa remarquable étude sur les tables de mortalité d'invalides et sur les tables d'invalidité [1], a analysé la plupart des travaux autrichiens et allemands : nous lui ferons, dans ce qui va suivre, de larges emprunts.

Les tables d'invalidité allemandes et autrichiennes sont, comme il vient d'être dit, professionnelles. Le risque professionnel étant le même pour toutes les têtes d'un groupe étudié, les auteurs ne se sont préoccupés que de dresser des tables donnant les taux d'invalidité à chaque âge, laissant de côté tous les autres facteurs, d'influence secondaire d'ailleurs, qui peuvent intervenir.

Si v_x est le nombre des ouvriers valides d'âge x considérés, et I_x le nombre de ceux d'entre eux qui deviendront invalides dans le courant de leur $(x + 1)^e$

[1] Warnier-Dulac, éditeurs, 8, rue Lamartine, 1897.

année d'âge, le taux d'invalidité u_x est, par définition :

$$u_x = \frac{I_x}{v_x}.$$

C'est la probabilité annuelle d'invalidité pour un individu d'âge x placé dans les mêmes conditions que le groupe en expérience.

Les plus anciennes tables donnant les probabilités annuelles d'invalidité datent de 1869 (Heym, Zeuner). Ensuite Küttner, Caron, Morgenbesser et Kaan ont étudié l'invalidité des mineurs en Saxe, Silésie, Prusse et Autriche; Behm et Zimmermann ont étudié, de leur côté, l'invalidité des employés de chemins de fer allemands.

M. Weber, analysant les résultats obtenus, fait ressortir les différences fort importantes des chiffres fournis par ces diverses tables et en tire la conclusion qu'une table d'invalidité est avant tout professionnelle et « qu'en toute rigueur, une table d'invalidité ne vaut que pour la population même qui a fourni les matériaux statistiques ». Le risque professionnel (accidents et maladies professionnels) joue, en effet, un rôle prépondérant dans le phénomène d'invalidité étudié par les auteurs précédents.

Cependant, Behm a proposé une table applicable à toute l'industrie, sauf aux mines et aux chemins de fer, et cette table a servi à calculer les charges probables que devait entraîner l'assurance obligatoire contre l'invalidité et la vieillesse. L'Office impérial allemand a lui-même publié une table qui résulte de l'application de la loi allemande de 1889 jusqu'en 1898.

Il faut remarquer que ce que les auteurs allemands

et autrichiens ont considéré n'est pas la probabilité d'invalidité totale, mais la probabilité d'être pensionné par une caisse ouvrière, et cette probabilité est très variable d'une caisse à l'autre, les unes accordant très facilement de faibles pensions pour des incapacités partielles peu accusées; les autres, au contraire, ne s'occupant guère que des pensions d'invalidité totale ou de retraite.

En France, on a fait très peu de travaux statistiques relatifs à l'invalidité, et on ne peut guère citer à cet égard que la table d'invalidité dressée en 1899 par M. Léon Marie, d'après les résultats fournis par les Caisses de retraites des employés de chemins de fer français.

Tables de mortalité d'invalides existantes. — *Tables étrangères.* — Nous verrons plus loin qu'un élément du calcul des primes de l'assurance contre l'invalidité est la probabilité annuelle de mortalité des invalides. Les auteurs cités plus haut ont donc été tout naturellement conduits, en étudiant l'invalidité, à dresser des tables de mortalité d'invalides.

Behm, Zimmermann, ont dressé des tables relatives aux invalides pensionnés des Caisses de chemins de fer allemands; Caron, Morgenbesser et Münscher ont utilisé les données qui leur ont été fournies par les Caisses minières allemandes, et Kaan, en Autriche, a fait pour la population minière un travail analogue.

Ces différentes tables accusent des taux de mortalité très élevés pour les âges jeunes. Les taux décroissent d'abord, passent par un minimum, l'âge auquel se produit ce minimum étant d'ailleurs assez variable,

puis croissent ensuite. Dans la jeunesse, la mortalité des invalides est beaucoup plus rapide que celle des valides, elle s'en rapproche de plus en plus, et on peut admettre qu'elle se confond avec elle à partir d'un âge assez avancé, âge auquel tout le monde doit être considéré comme invalide.

Mais ces tables présentent un défaut capital, qu'un simple raisonnement permettra de mettre en évidence. Les taux de mortalité ont été, en effet, déterminés de la façon suivante : on a réparti la population invalide étudiée en groupes de même âge et on a déterminé le nombre des décès annuels de chaque groupe. Or est-ce bien l'âge qui est le facteur prépondérant dans le phénomène? Parmi les invalides d'un même groupe, les uns viennent d'entrer en état d'invalidité, les autres sont invalides depuis longtemps déjà. On ne saurait admettre que la mortalité des uns soit comparable à celle des autres. En effet, comme le remarque fort justement M. Weber, deux causes influent sur la mortalité des invalides : l'une, qui est le vieillissement naturel, normal, des organes; l'autre, qui est l'affaiblissement des forces consécutif soit au traumatisme, soit à l'état morbide, causes de l'invalidité. Cet affaiblissement des forces joue certainement un rôle tout à fait prépondérant au début; son influence diminue graduellement au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'époque d'entrée en invalidité, de l'époque de la consolidation de la blessure ou de l'infirmité.

Si l'on dresse donc une table de taux de mortalité d'invalides par âges à l'entrée, les taux, très élevés au moment de l'entrée en invalidité, diminueront progressivement et assez rapidement, selon toute probabilité,

pour se rapprocher des taux de la table relative au reste de la population et se confondre bientôt avec ces derniers.

Ces considérations expliquent bien le minimum observé dans les tables indépendantes de l'âge à l'entrée dressées par les statisticiens allemands et autrichiens : en effet, pour des âges jeunes, l'époque de l'entrée en invalidité est récente, le taux de mortalité des invalides doit être très différent du taux relatif aux valides. Pour les âges plus avancés, au contraire, le nombre des invalides anciens surpasse celui des invalides récents, et la mortalité générale doit se rapprocher de celle de la population normale. Les taux moyens annuels successifs diminuent donc jusqu'à l'âge où le vieillissement naturel devient la cause prépondérante ; à partir de ce moment, ils augmentent.

Enfin, une autre cause rend à peu près inutilisables les renseignements fournis par les statistiques allemandes : ces dernières étaient, en effet, le résultat des observations recueillies au sein de caisses d'invalidité, et parmi les pensionnés de ces caisses se trouvaient des invalides de toute sorte, présentant les degrés d'incapacité de travail les plus divers. On classait dans un même groupe aussi bien l'invalide à qui l'on vient de couper un seul doigt et qui, de ce fait, touche une pension minime tout en continuant à travailler, et le travailleur qu'une attaque de paralysie a cloué sur un lit ou une chaise longue pour le reste de sa vie. Il est évident que les degrés de vitalité de ces deux pensionnés ne sont pas comparables. L'invalide total, qu'il soit encore sous le coup de l'ébranlement traumatique dont il a été victime, ou soumis aux influences mor-

bides qui le mirent hors d'état de travailler, est, en général, infiniment plus compromis que l'ouvrier amputé de quelques doigts; l'état de santé de ce dernier ne diffère pas sensiblement de ce qu'il était avant l'accident.

Il est donc nécessaire de répartir la population invalide étudiée en groupes ne comprenant que des travailleurs atteints de la même incapacité permanente de travail ou d'incapacités de même ordre. En particulier, il sera surtout intéressant de dresser une table de mortalité d'invalides totaux ou considérés comme tels, et cette table devra tenir compte de l'âge à l'entrée dans l'état d'incapacité permanente de travail.

Tables françaises (ICF et CRI). — S'inspirant de ces idées, M. Léon Marie a dressé une table de mortalité d'invalides totaux que l'on désigne communément aujourd'hui sous le nom de table ICF (Invalides des chemins de fer français). Les Caisses de retraites des Compagnies de chemins de fer étaient les seules institutions en France qui pussent fournir les éléments d'une telle table.

Chaque année, les Compagnies mettent prématurément à la retraite un certain nombre d'agents n'ayant pas atteint l'âge réglementaire, mais incapables de continuer leur service. Ces agents, titulaires de pensions viagères, peuvent être suivis depuis l'époque de leur mise à la retraite jusqu'à leur mort. M. Marie demanda aux Compagnies de lui fournir des états indiquant la date de la naissance et celle de la mise à la retraite des titulaires de pensions viagères, la date de leur décès et, autant que cela était possible, le motif de leur mise à la retraite. Cette dernière question était destinée à

faciliter l'élimination des agents qui auraient été mis à la retraite pour d'autres motifs que l'invalidité véritable.

Les investigations portèrent jusqu'au 31 décembre 1895, et la table fut construite en 1898. Le nombre restreint des observations obligea M. Marie à grouper ces observations par périodes quinquennales, et les taux furent ajustés par la méthode graphique. Les courbes annuelles furent interpolées au sentiment entre les courbes quinquennales.

Les âges limites sont 30 et 65 ans. Les courbes montrent que l'invalidité n'influe sur la mortalité générale que pendant une période ne dépassant pas 15 années, et que les taux de mortalité des invalides sont sensiblement égaux pendant la première année ou même les deux premières années, quel que soit l'âge d'entrée en invalidité. Toutes les courbes se raccordent avec la courbe de mortalité représentant la table CR.

Cette table ICF avait été dressée à la demande du syndicat des Compagnies françaises d'assurances à primes fixes contre les accidents. Comme c'était en France le seul document traduisant des résultats expérimentaux de cette nature, le Ministère du Commerce l'utilisa lors de l'établissement du barème minimum servant à la vérification des réserves mathématiques des sociétés d'assurances contre les accidents du travail. On peut remarquer toutefois que cette table ne paraît pas convenir d'une façon absolue pour cet objet. En effet, un grand nombre d'invalides, compris dans les statistiques dressées par M. Marie, étaient des invalides morbides et non des victimes d'accidents du travail. Or la mortalité des premiers doit être plus forte que

celle des seconds; car la cause morbide, la diathèse qui a occasionné l'invalidité morbide, laisse dans l'organisme des traces plus profondes et constitue un danger de mort plus imminent que l'accident, le traumatisme, qui frappe un travailleur sain. Il est permis de penser que, dans le cas exclusif de victimes d'accidents du travail, le taux de mortalité reprendra plus rapidement sa valeur normale, les courbes rejoindront plus vite la courbe relative à la population générale.

Dans le même but, la Caisse des Retraites pour la vieillesse a dressé, en 1899, une table désignée sous le nom de table CRI, qu'elle a modifiée en 1904. La table CRI-1899 prévoit une influence de l'invalidité sur la mortalité encore plus importante et de plus de durée que la table ICF. Le contraire a lieu pour la table CRI-1904[1].

D'une façon générale, on peut dire que ces tables reposent sur des données expérimentales tout à fait insuffisantes; elles sont loin de fournir des renseignements aussi précis et aussi utiles que les tables de mortalité générale établies dans ces dernières années et en usage actuellement dans les Compagnies d'assurances sur la vie.

[1] La durée de cette influence est de 15 ans quel que soit l'âge d'entrée en invalidité pour la table CRI-1899, de 10 ans pour la table CRI-1904, et pour la table ICF, elle varie entre ces deux limites.

E. — CONSTRUCTION RATIONNELLE DES TABLES D'INVALIDITÉ ET DE MORTALITÉ D'INVALIDES

Tables d'invalidité. — Supposons, comme nous l'avons fait précédemment, que la caisse chargée du service des rentes d'invalidité n'attribue des pensions qu'aux invalides totaux ou considérés comme tels (invalides ayant un salaire inférieur au salaire minimum fixé à l'avance). Cette caisse, si elle n'est pas professionnelle, répartira ses pensionnés et ses assurés par professions.

Si l'on pouvait connaître exactement le nombre I_x des individus d'un groupe v_x de valides d'âge x qui deviennent invalides dans l'année, le taux d'invalidité u_x serait, comme on l'a dit plus haut : $u_x = \frac{I_x}{v_x}$.

Mais la population étudiée n'est pas absolument invariable : de nouvelles têtes, au nombre de B_x, entrent un observation; d'autres, au nombre de C_x, disparaissent dans le courant de l'année, sans cependant être décédées. Si le nombre des têtes en observation au début de l'exercice était A_x, on peut admettre que :

$$u_x = \frac{I_x}{A_x + \frac{B_x - C_x}{2}},$$ [1]

[1] M. Karup (Voir compte rendu du 3e congrès international

ce qui revient à supposer que toutes les entrées et les sorties s'effectuent en même temps au milieu de l'année, c'est-à-dire qu'elles se répartissent uniformément sur les douze mois de l'année.

Pour préparer le matériel statistique, on fera, à l'exemple de Kaan, remplir par l'administration de la Caisse étudiée des états annuels donnant les nombres A_x, B_x, C_x, I_x :

ANNÉE 1907

DATE DE LA NAISSANCE	NOMBRE DES MEMBRES COTISANTS DE LA CAISSE			
	AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	ENTRÉS PENDANT L'ANNÉE	SORTIS PENDANT L'ANNÉE (non compris les décédés et les membres devenus invalides)	Devenus invalides pendant l'année, y compris ceux qui sont morts ensuite, dans le courant de l'année.
Du 1er juillet 1871 au 30 juin 1872.	A_{35}	B_{35}	C_{35}	D_{35}
Du 1er juillet 1870 au 30 juin 1871.	A_{36}	B_{36}	C_{36}	D_{36}
....	....	....	....	....

d'actuaires, Paris, 1900, mémoire de M. Hamza) considère la probabilité suivante : $i'_x = \dfrac{I_x}{A_x + \dfrac{B_x - C_x - D_x}{2}}$,

qu'il désigne sous le nom de *probabilité absolue* d'invalidité. Il retranche du nombre des têtes en expérience au début de l'année la moitié du nombre des décès de valides qui se produisent dans l'année. La possibilité de devenir invalides cesse, en effet, au moment du décès, pour les valides qui meurent avant d'être entrés en état d'invalidité. La probabilité absolue est donc la

M. Weber (*op. cit.*) indique le moyen de dresser des tables au moyen de la seule connaissance du nombre des cotisants et du nombre des pensionnés au début et à la fin de l'année. Mais on en est alors réduit à faire des approximations plus ou moins acceptables, et M. Weber reconnaît lui-même qu'une table dressée avec de tels éléments n'aurait pas grande valeur.

Enfin, nous admettons que la Caisse étudiée n'accorde une pension qu'autant que l'incapacité de travail présente un caractère permanent et définitif, sinon (et c'était le cas pour les Caisses allemandes) il faudrait faire intervenir une probabilité nouvelle : la probabilité de reprise du travail, qui a été étudiée par Münscher.

Une fois la table brute des taux d'invalidité dressée, on l'ajustera comme toutes les tables analogues, soit au moyen d'un procédé graphique, soit au moyen d'une fonction interpolatrice dont le choix dépendra de l'allure générale de la table obtenue.

Ainsi Behm a employé la fonction :

$$u_x = u_{20} \times 2^{\frac{x-20}{5}}$$ [1]

pour ajuster sa table relative aux professions diverses.

probabilité que l'on devrait considérer si chaque personne décédée en état de validité était immédiatement remplacée par un nouvel entrant valide du même âge.

De même la probabilité absolue annuelle de décès d'un valide d'âge x est :
$$q_x^v = \frac{D_x}{A_x + \frac{B_x - C_x - I_x}{2}},$$
puisque la possibilité de survivre en état de validité cesse pour les I_x invalides au moment où ils le deviennent.

[1] Behm admet que $u_{20} = 0{,}000\,190\,36$.

Tables de taux de mortalité d'invalides. — La construction de tables de taux de mortalité d'invalides résulte de l'observation des pensionnés d'une caisse, besogne en somme assez facile, les invalides ne disparaissant guère que par décès : lorsque le service de la pension cesse, on peut supposer que le rentier est décédé. En particulier, lorsque les pensions comportent le payement d'arrérages au décès, la réclamation des héritiers, qui ne manque pas de se produire, indique exactement la date du décès.

Nous avons vu précédemment qu'il était nécessaire de construire une table par âges à l'entrée, comme l'a fait M. Léon Marie, si l'on veut obtenir une représentation exacte et utilisable du phénomène. Dans chaque groupe d'invalides du même âge, il faudra distinguer les divers sous-groupes composés d'invalides étant depuis le même temps en état d'invalidité. On déterminera le nombre des décès qui se produisent annuellement dans chacun de ces sous-groupes.

Le classement des résultats peut être facilement obtenu si l'on affecte à chaque pensionné une fiche ainsi disposée :

NOMS ET PRÉNOMS : ....
DATE DE NAISSANCE : ....
DATE DE L'ENTRÉE EN INVALIDITÉ : .... (ou du payement du 1er terme de la pension.)
DATE DU DÉCÈS : .... (ou du payement du dernier terme de la pension.)

Les résultats du dépouillement de ces fiches seront inscrits sur des feuilles récapitulatives donnant pour chaque année, par âges, le nombre des décès qui se produisent parmi les différentes classes de pensionnés. On considérera comme têtes du même âge entrées en même temps dans l'état d'invalidité deux têtes nées entre le 1er juillet d'une certaine année et le 30 juin de l'année suivante et devenues invalides dans le courant d'une même année (du 1er janvier au 31 décembre).

La table construite, il faudra l'ajuster, soit par un procédé graphique, soit par un procédé analytique. L'ajustement ne sera possible que si les données sont en nombre suffisant, et il ne faut pas se dissimuler que l'établissement d'une telle table par âges à l'entrée exigera, en raison des éléments nécessaires, un grand nombre d'années d'observation.

On ne saurait préjuger à l'avance, et en l'absence de données, de la forme que doit présenter la fonction interpolatrice. Rappelons cependant que M. Poterin du Motel a proposé pour les tables de mortalité par âges

à l'entrée l'équation $y = a + \frac{b}{C^z} q^x$,

y étant le taux de mortalité, x l'âge actuel et z l'âge d'entrée. Mais cette équation ne saurait convenir ici, elle implique un accroissement incessant du taux de mortalité, et on sait que le taux passe par un minimum dans le cas de la mortalité d'invalides. Aussi M. Weber propose-t-il une équation de la forme :

$$y = f(z)e^{\alpha x} + \varphi(z)e^{-\beta x}$$

qui paraît mieux répondre à la question, la forme et les coefficients de $f(z)$ et $\varphi(z)$ restant à déterminer.

Tables des taux de mortalité de valides. — On comprendra par ce qui suit la nécessité de l'établissement d'une table des taux de mortalité de valides. Elle résultera de l'observation des décès qui se produisent parmi les cotisants de la population ouvrière considérée (le payement des cotisations cesse en effet au moment où l'invalidité apparaît). Au tableau de la page 338 qui est destiné à être rempli par l'administration de la caisse étudiée, il suffit d'ajouter une colonne dans laquelle on inscrira le nombre des cotisants décédés chaque année avant d'avoir eu droit à une pension. Ce nombre ne sera pas plus difficile à obtenir que le nombre des sorties de l'année pour des causes autres que le décès et l'entrée en invalidité.

Tables de valides et d'invalides. — A l'aide des éléments fournis par les diverses tables qui précèdent, on peut construire des tables analogues à la table de survie et donnant les nombres successifs soit des valides, soit des invalides vivants à chaque âge. Ce sont ces tables qui nous serviront pour le calcul des primes et des pensions.

Désignons par v_x, v_{x+1}, ...; w_x, w_{x+1}, ... les nombres successifs de valides et d'invalides, par u_x, u_{x+1} ... les taux d'invalidité successifs, par $\overset{v}{q}_x$ et $\overset{w}{q}_x$ les taux de mortalité des valides et des invalides. Considérons un groupe de valides v_x entrant à l'âge x dans une société qui pratique l'assurance contre l'invalidité, et supposons que les individus qui composent ce groupe

n'abandonnent jamais la société (ou approximativement que le nombre des entrées compense le nombre des sorties).

Pendant la première année d'assurance, il se produit $u_x\ v_x$ cas d'invalidité et D_x décès de valides. En faisant l'hypothèse des cas d'invalidité survenant au milieu de l'année, hypothèse analogue à celle que l'on fait pour les décès dans l'assurance sur la vie, on a :

$$D_x = \left(v_x - \frac{u_x v_x}{2}\right) q_x^v$$

et:

$$v_x = v_{x+1} + u_x v_x + \left(v_x - \frac{u_x v_x}{2}\right) q_x^v.$$

On obtient ainsi une relation de récurrence donnant de proche en proche les nombres de valides successifs :

$$v_{x+1},\ v_{x+2}\ \ldots,$$

connaissant les taux u et q^v.

La table des invalides vivants à chaque âge est tout aussi facile à obtenir. Pendant la première année en effet, il s'est produit $u_x v_x$ cas d'invalidité, et, en reprenant l'hypothèse des cas d'invalidité se produisant au milieu de l'année, il y aura en fin d'année:

$$u_x v_x \left(1 - \frac{q_x^w}{2}\right) = w_{x+1}$$

invalides vivants. Pendant la seconde année, il se produira de même $u_{x+1}v_{x+1}$ cas d'invalidité, et il restera à la fin de la seconde année :

$$w_{x+2} = u_{x+1} v_{x+1} \left(1 - \frac{q_{x+1}^w}{2}\right) + w_{x+1}\left(1 - q_{x+1}^w\right)$$

invalides vivants. Et ainsi de suite. On aura ainsi :

$$w_{x+n} = u_{x+n-1} v_{x+n-1} \left(1 - \frac{\overset{w}{q}_{x+n-1}}{2}\right) + w_{x+n-1}\left(1 - \overset{w}{q}_{x+n-1}\right) + \ldots$$
$$+ w_{x+1}\left(1 - \overset{w}{q}_{x+1}\right) \ldots \left(1 - \overset{w}{q}_{x+n-1}\right).$$

Il suffira, pour dresser cette table, d'avoir à sa disposition les trois tables des valides, des taux de mortalité des invalides et des taux d'invalidité.

La table des valides s'arrêtera naturellement à l'âge auquel tous les travailleurs auront droit à une pension de retraite. Il y a donc un âge limite de validité au delà duquel tout le monde est considéré comme invalide.

F. — CALCUL DES PRIMES DE L'ASSURANCE CONTRE L'INVALIDITÉ. COMMUTATIONS

Considérons un groupe de v_x personnes valides d'âge x qui désirent constituer une caisse d'assurance contre l'invalidité. Supposons que chacune de ces personnes verse dans ce but au commencement de l'année une prime ou cotisation égale à ϖ, ces primes n'étant d'ailleurs payables que pendant la durée de validité de chacun des assurés. Supposons enfin construites les tables donnant les nombres de valides et d'invalides vivants d'année en année. Tout invalide touchera au début de chaque année à partir de celle

qui suit son entrée en invalidité une pension π. Si $(x + \xi)$ est l'âge auquel tout le monde est considéré comme invalide et où l'on cesse de payer sa cotisation, si $(x + \eta)$ est l'âge auquel il n'y a plus de vivants, l'égalité des valeurs actuelles des primes qui doivent être versées par les sociétaires valides et des pensions qui seront payées aux invalides nous donne la relation :

$$\varpi\left[v_x + v_{x+1}(1+i)^{-1} + v_{x+2}(1+i)^{-2} + \ldots + v_{x+\xi}(1+i)^{-\xi}\right]$$
$$= \pi\left[w_{x+1}(1+i)^{-1} + w_{x+2}(1+i)^{-2} + \ldots + w_{x+\xi}(1+i)^{-\xi} + \ldots + w_{x+\eta}(1+i)^{-\eta}\right].$$

Si l'on pose

$$v_x(1+i)^{-x} = \Delta_x$$
$$w_x(1+i)^{-x} = \Gamma_x$$

on aura :

$$\varpi \Sigma_x^{x+\xi} \Delta_n = \pi \Sigma_{x+1}^{x+\eta} \Gamma_n.$$

Enfin, si l'on désigne par H_{x+1} et E_x les quantités suivantes :

$$H_{x+1} = \Sigma_0^{\eta-1} \Gamma_{x+1+n}$$
$$E_x = \Sigma_0^{\xi} \Delta_{x+n},$$

la prime annuelle ϖ sera donnée par la relation

$$\varpi = \pi \frac{H_{x+1}}{E_x}.$$

On construira des tables des quantités Δ, Γ, H et E, et à l'aide de ces tables de commutations on obtiendra

le rapport $\frac{\varpi}{\pi}$ de la cotisation à la pension par une formule analogue à celle qui donne l'annuité viagère ordinaire.

Au lieu de servir une pension d'invalidité, la Caisse d'assurances pourrait attribuer un capital C à chacun des sociétaires qui devient invalide permanent. Si l'on suppose, comme d'habitude, que ces capitaux sont payés au milieu de l'année, ce qui revient à prévoir qu'il y aura autant de gens qui deviendront invalides dans le premier semestre que dans le second, on aura :

$$\varpi\left[v_x + v_{x+1}(1+i)^{-1} + \ldots + v_{x+\xi}(1+i)^{-\xi}\right]$$
$$= C\left[u_x v_x (1+i)^{-\frac{1}{2}} + u_{x+1}v_{x+1}(1+i)^{-\frac{3}{2}} + \ldots\right.$$
$$\left. + \ldots + u_{x+\xi}v_{x+\xi}(1+i)^{-\xi-\frac{1}{2}}\right]^{1}$$
$$= (1+i)^{-\frac{1}{2}}C\left[u_x v_x + u_{x+1}v_{x+1}(1+i)^{-1} + \ldots\right.$$
$$\left. + \ldots + u_{x+\xi}v_{x+\xi}(1+i)^{-\xi}\right].$$

Par les commutations :

$$\varpi E_x = C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\Sigma_0^{\xi-x} u_{x+n}\Delta_{x+n}.$$

On peut faire apparaître dans cette relation les probabilités d'atteindre un certain âge en restant valide. Ainsi, soit p'^k_x la probabilité pour qu'une personne d'âge x atteigne l'âge $(x+k)$ en restant valide :

$$p'^k_x = \frac{v_{x+k}}{v_x}$$

[1] Remarquer que par hypothèse, $u_{x+\xi} = 1$, puisque $(x+\xi)$ est l'âge limite de validité.

$$P'^{k}_{x]} = \frac{v_{x+k}}{v_x}(1+i)^{-k};$$

on obtient :

$$\varpi\left[1 + P'^1_x + P'^2_x + \ldots + P'^k_x\right]$$

$$= C(1+i)^{-\frac{1}{2}}\left[u_x + u_{x+1}P'^1_x + \ldots\right].$$

Généralement les cotisations et rentes sont payables en plusieurs termes dans l'année. On pourra faire alors un calcul analogue à celui qui a été fait à propos des annuités fractionnées. (Voir *Assurances sur la vie*, page 111 et suivantes.)

Supposons, par exemple, que la cotisation annuelle ϖ soit payable en k fois par an. La valeur actuelle de toutes les cotisations $\frac{\varpi}{k}$ qui seront versées est égale à :

$$\frac{\varpi}{k}\Big[v_x + v_{x+\frac{1}{k}}(1+i)^{-\frac{1}{k}} + \ldots + v_{x+\frac{k-1}{k}}(1+i)^{-\frac{k-1}{k}}$$

$$+ v_{x+1}(1+i)^{-1} + v_{x+1+\frac{1}{k}}(1+i)^{-1-\frac{1}{k}} + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$= \frac{\varpi}{k}\left(\Delta_x + \Delta_{x+\frac{1}{k}} + \Delta_{x+\frac{2}{k}} + \ldots + \Delta_{x+1} + \ldots\right).$$

On peut supposer que la variation du nombre des valides est, dans l'année, proportionnelle au temps :

$$v_{x+\frac{1}{k}} = v_x - \frac{v_x - v_{x+1}}{k}$$

$$v_{x+\frac{2}{k}} = v_x - \frac{2}{k}\left(v_x - v_{x+1}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et porter ces valeurs des quantités inconnues :

$$v_{x+\frac{1}{k}},\ v_{x+\frac{2}{k}} \ldots,$$

dans l'expression précédente. On peut aussi plus simplement faire la même hypothèse sur les quantités Δ_x.

$$\Delta_{x+\frac{1}{k}} = \Delta_x + \frac{\Delta_{x+1} - \Delta_x}{k}$$

$$\Delta_{x+\frac{2}{k}} = \Delta_x + \frac{2}{k}(\Delta_{x+1} - \Delta_x)$$

. . . .

et on obtient alors :

$$\frac{\varpi}{k}\left[\Delta_x + \Delta_{x+\frac{1}{k}} + \ldots\right] = \varpi\left[E_{x+1} + \frac{k+1}{2k}\Delta_x\right].$$

De même si la rente d'invalidité π est payable en k' fois par an, elle aura pour valeur actuelle au début de l'assurance :

$$\pi\left[H_{x+2} + \frac{k'+1}{2k'}\Gamma_{x+1}\right]$$

et la relation entre ϖ et π s'écrira :

$$\varpi\left[E_{x+1} + \frac{k+1}{2k}\Delta_x\right] = \pi\left[H_{x+2} + \frac{k'+1}{2k'}\Gamma_{x+1}\right].$$

On voit que la possession des deux tables de valides et d'invalides dont nous avons indiqué la construction, suffit au calcul des primes pures des capitaux et rentes d'invalidité [1].

[1] M. le Dr Schaertlin vient de faire paraître à Berne, chez Staempfli et Cie, un opuscule ayant pour titre : *Contributions à la théorie mathématique de l'assurance en cas d'invalidité.* Les calculs y sont conduits d'une façon tout à fait différente de

Il faudrait ajouter à ces primes pures un certain chargement destiné à faire face aux frais de gestion et d'administration de la société.

La nécessité des réserves se fait sentir aussi bien pour l'assurance contre l'invalidité que pour l'assurance sur la vie; la définition en reste la même, et les cotisations successives sont capitalisées jusqu'au jour où l'invalidité se déclare: la réserve de chaque contrat doit alors être suffisante pour constituer la rente promise ou pour verser le capital assuré.

la précédente. M. Schaertlin suppose connues différentes probabilités telles que la probabilité pour un valide d'âge x de mourir l'année suivante comme actif, ou comme invalide, la probabilité pour un valide d'âge x de devenir invalide pendant l'année suivante, et de mourir ensuite pendant la même année, ou d'être encore en vie à la fin de l'année, etc.; il en déduit les valeurs d'annuités viagères 1 payables à terme échu, soit à un valide pendant la durée de sa validité $\left(a_x^{\overline{aa}}\right)$, soit à un invalide $\left(a_x^{i}\right)$, soit à un vivant quelconque pendant sa vie entière (a_x), et à l'aide de ces valeurs il calcule l'expression de la rente viagère égale à l'unité payable après que l'actif d'âge x est devenu invalide (le premier terme étant payable au commencement de l'année qui suit celle où il est devenu invalide), expression qu'il trouve égale à :

$$a_x^{\overline{ai}} = a_x^{i} - a_x^{\overline{aa}} - \frac{l_x}{l_x^{\overline{aa}}}\left(a_x^{i} - a_x\right),$$

l_x étant le nombre des vivants à l'âge x, et $l_x^{\overline{aa}}$ étant le nombre des valides à cet âge.

(Lire cet ouvrage où l'on trouvera une foule de calculs intéressants, bien que d'un intérêt plutôt théorique).

CHAPITRE III

ASSURANCES CONTRE LES ACCIDENTS

G. — GÉNÉRALITÉS

L'assurance contre la mortalité a été l'objet de nombreuses études qui ont permis d'établir la théorie mathématique des Assurances sur la vie humaine. Les Compagnies d'assurances contre les accidents se sont développées beaucoup plus tard que les Compagnies d'assurances sur la vie : c'est évidemment l'une des raisons pour lesquelles il n'existe pas encore aujourd'hui de théorie mathématique des Assurances contre les accidents. Il faut aussi tenir compte de la diversité des opérations de chaque Compagnie et du peu de documents statistiques dont on dispose. La mort atteint chaque personne : les observations peuvent donc être très nombreuses ; en outre, la mortalité est, comme l'expérience le montre, assez peu influencée par les transformations de la Société ; les observations peuvent par conséquent s'étendre à une longue période d'années. La théorie mathématique de l'assurance sur la vie a été possible parce que les statistiques avaient fourni aux actuaires des lois de mortalité.

Si nous considérons au contraire l'assurance des chevaux et voitures circulant dans Paris, on conçoit

que les statistiques ne pourront porter que sur un temps très restreint; la circulation se modifie très rapidement, le nombre toujours croissant d'automobiles de plus en plus puissantes augmente sensiblement le nombre et l'importance des accidents. Qu'un préfet de police fixe une vitesse maxima très faible, les accidents diminuent; la sévérité des tribunaux, la construction de voies nouvelles ou de passages souterrains, l'augmentation du nombre d'agents préposés à la circulation sont autant de raisons capables de modifier profondément les probabilités d'accidents. En outre les voitures soumises à l'observation sont très différentes par leur forme et par leur destination : telle voiture facilement maniable, attelée d'un seul cheval, sort deux heures par jour; telle autre, de dimensions énormes, attelée de quatre chevaux, circule toute la journée. Il est impossible de comprendre dans une même statistique des objets aussi peu semblables; il est donc nécessaire d'établir des statistiques comprenant peu d'objets semblables, observés pendant un temps assez court. On obtient par ce moyen des résultats peu exacts, mais permettant néanmoins, grâce à un chargement élevé, de pratiquer l'assurance.

Cependant il a été fait depuis quelques années un certain nombre d'études théoriques intéressantes; on a cherché, notamment pour l'assurance contre les accidents du travail, des méthodes de calcul des primes. Malheureusement les formules auxquelles elles conduisent renferment presque toujours des probabilités inconnues.

Nous allons passer en revue les différentes branches d'assurances contre les accidents.

H. — ASSURANCE
CONTRE LES ACCIDENTS DU TRAVAIL

Jusqu'à ces dernières années les accidents du travail étaient soumis au régime de la responsabilité civile. L'ouvrier, victime d'un accident, ne pouvait obtenir une indemnité de son patron que si ce dernier était responsable de l'accident. Ce cas était extrêmement rare; généralement l'accident avait pour cause soit l'imprudence ou l'inexpérience de l'ouvrier, soit le mauvais fonctionnement d'une machine. Le blessé restait souvent infirme jusqu'à la fin de ses jours, et quand il trouvait du travail, c'était à des conditions de salaire ne lui permettant pas de vivre.

Le machinisme se développant de plus en plus, le nombre de ces invalides du travail allait toujours croissant; les législateurs des différents pays durent chercher un remède à cette situation : telle est l'origine des différentes lois sur les accidents du travail.

Au vieux principe de la responsabilité civile se substitua celui de la réparation forfaitaire; un accident se produit pendant le travail, la cause en est le travail : c'est à lui à réparer l'accident, et comme il profite à la fois au patron et à l'ouvrier, la réparation sera partagée entre le patron et l'ouvrier.

Ce partage varie suivant les législations. Nous nous bornerons ici à indiquer les réparations accordées aux ouvriers par la loi française du 9 avril 1898.

Loi du 9 avril 1898 (1). 1° *Accidents entraînant une incapacité temporaire de travail.* — La loi distingue plusieurs cas suivant la durée de l'incapacité; mais en principe elle accorde le remboursement des frais de traitement du blessé et une indemnité journalière égale à la moitié du salaire quotidien du blessé.

2° *Accidents entraînant une incapacité permanente de travail.* — Le blessé a droit, outre les frais de traitement et l'indemnité journalière, à une rente viagère égale à la moitié de la réduction présumée du salaire. Dans de nombreux cas, des frais judiciaires considérables viennent encore majorer, pour le patron, le coût de l'accident.

3° *Accidents entraînant la mort.* — Outre le remboursement des frais de traitement, des frais funéraires, le payement de l'indemnité journalière, la veuve, les enfants et parfois les ascendants de la victime ont droit à des rentes viagères déterminées en fonction du salaire.

Assurance contre les accidents du travail. Les patrons assujettis à la loi de 1898 devaient naturellement chercher à s'assurer contre les conséquences des accidents, conséquences qui pouvaient amener leur ruine ou tout au moins apporter dans leurs affaires de graves perturbations.

Comme toujours le besoin a créé l'organe. Les Compagnies d'assurances ont organisé une branche spéciale

[1] Nous ne donnons ici que les grandes lignes de cette loi, qui divise les accidents en un trop grand nombre de catégories pour que nous puissions les énumérer toutes. Pour plus de détails voir la loi de 1898, dont le texte est affiché dans toutes les entreprises assujetties.

d'assurances contre les accidents du travail ; à ne considérer que le total des primes encaissées, cette branche est aujourd'hui la plus importante des Compagnies d'assurances contre les accidents. Les nécessités de la concurrence obligent ces Compagnies à fixer des taux de primes aussi bas que possible, tout en ayant la certitude de ne pas faire de pertes. Il est donc indispensable de déterminer les primes pures avec le maximum de précision. Jusqu'ici les Compagnies n'ont guère employé que des méthodes empiriques ; elles n'ont pas, comme les Compagnies d'assurances sur la vie, de tarifs bien établis ; la prime d'un contrat est susceptible d'augmentation ou de diminution suivant les résultats expérimentaux fournis par le contrat lui-même.

La détermination d'une prime est une opération extrêmement difficile ; la prime dépend en effet de deux éléments dont l'appréciation est fort malaisée : 1° la probabilité d'accidents ; 2° le coût des accidents.

Probabilités d'accidents. — Les probabilités d'accidents sont des fonctions très complexes de nombreuses variables. En premier lieu, il faut distinguer la profession ; le risque professionnel est très faible pour des employés de bureau, il est très élevé chez les couvreurs et les mineurs. Dans une même profession les dangers sont plus ou moins grands suivant l'outillage employé, suivant que les machines sont plus ou moins protégées ; la surveillance exercée par les contremaîtres, la grandeur et l'éclairage des locaux, la réglementation du travail sont des causes capables de modifier les probabilités d'accidents. On doit aussi considérer l'âge de l'ouvrier : un apprenti ignorant, inex-

périmenté, maladroit, imprudent, sera plus facilement victime d'un accident qu'un ouvrier adulte ; il en est de même pour un vieil ouvrier affaibli par l'âge. Dans ces conditions, on conçoit que la probabilité d'accidents pour un individu déterminé employé à des travaux déterminés ne puisse être connue bien exactement.

Coût des accidents. — L'accident étant survenu, le coût de sa réparation dépend : 1° de la gravité de l'accident ; 2° de l'âge et de la nationalité du blessé ; 3° en cas de décès, de la situation de famille de la victime [1]. Le même accident survenant à des ouvriers

[1] Toutes les fois que la réparation de l'accident donne lieu à l'attribution de rentes, les débiteurs peuvent, d'après l'article 28 de la loi du 9 avril 1898, se libérer en une fois en versant à la Caisse Nationale des Retraites le capital représentatif de ces rentes, calculé d'après un tarif élaboré par la Caisse elle-même.

La Caisse des Retraites a promulgué jusqu'ici deux groupes de tarifs : l'un, qui fut en vigueur jusqu'au 31 décembre 1904, avait été dressé d'après les tables CR et CRI 1899 et le taux de 3 $^1/_2$ $^0/_0$; l'autre, qui est en vigueur actuellement, a été établi d'après les tables CR et CRI 1904 et le taux de 3 $^1/_4$ $^0/_0$.

Sur ces dernières bases, la Caisse a calculé cinq tarifs qui sont les suivants :

1° Tarif applicable aux conjoints et ascendants des victimes d'accidents mortels ;

2° Tarif applicable aux enfants et descendants des victimes d'accidents mortels ;

3° Tarif applicable aux victimes d'accidents ayant entraîné l'incapacité absolue et permanente de travail ;

4° Tarif permettant d'évaluer le prix d'une rente viagère reposant sur la tête d'un invalide absolu et réversible sur la tête du conjoint ;

5° Tarif permettant d'évaluer une rente viagère au profit d'un pensionnaire valide, et réversible sur la tête du conjoint.

Le capital relatif au cas d'un invalide partiel s'obtient au moyen d'une interpolation proportionnelle entre les capitaux correspondants calculés successivement pour un valide et pour

différents pourra donc donner lieu à des réparations très inégales. Ainsi supposons survenu un accident mor-

un invalide total. Pour éviter les interpolations multiples que nécessiterait l'examen de tous les cas concrets, M. F. Cottin a dressé un barème mis sous forme d'une table à double entrée qui donne immédiatement le capital cherché, étant donné le taux d'invalidité, l'âge du blessé au moment de l'accident, et le temps écoulé depuis cet accident.

D'autre part, le ministère du Commerce (*Journ. off.* du 8 avril 1899, arrêté du 30 mars 1899) a imposé aux Compagnies d'assurances contre les accidents du travail un barème minimum pour le calcul des réserves mathématiques à constituer au moment du règlement des accidents, si les Compagnies ne veulent pas profiter des facilités que leur accorde la Caisse Nationale des Retraites.

Ce barème, calculé d'après les tables CR et ICF et le taux de 3 $^0/_0$ (Voir *Recueil de documents sur les accidents du travail*, n° 1, Berger-Levrault), est divisé en 4 tableaux donnant : le 1er, le prix d'une rente viagère d'un franc au profit des veuves et ascendants de victimes d'accidents; le 2e, le prix d'une rente viagère et temporaire d'un franc au profit des orphelins (les rentes sont collectives, mais ne sont calculées qu'au moyen d'une approximation); le 3e, le prix d'une rente viagère d'un franc au profit des victimes d'accidents qui ont entraîné l'incapacité permanente absolue. Le prix d'une telle rente pour un invalide partiel s'obtient comme il a été dit précédemment, par interpolation; enfin le 4e permet de calculer le complément de réserve destiné à faire face aux charges résultant du décès de la victime pendant le délai de revision (3 ans). Ce complément est la prime unique de l'assurance d'un capital de survie égal au capital que la Compagnie doit constituer si le décès, par suite d'accident, se produit pendant la période de 3 ans. On a admis comme moyenne que chaque fois qu'un décès se produit, il y a 0,98 veuve, 1,368 enfants et 0,21 ascendant. A l'aide de ces chiffres, on calcule le capital constitutif pour 100 francs de salaire, prime unique d'une assurance de survie temporaire en cas de décès dans les 3 ans, et c'est ce capital, déterminé pour les valides et les invalides totaux, qui figure dans le tableau IV.

Pour les invalides partiels, on procède, comme toujours, par interpolation proportionnelle.

Il est à remarquer que dans l'établissement du tableau IV, on

tel dans lequel l'ouvrier s'est tué sur le coup ; si la victime n'a aucune famille, le patron n'aura qu'une centaine de francs à payer ; si au contraire l'ouvrier laisse une veuve et plusieurs enfants, la constitution des rentes pourra exiger un capital d'une vingtaine de mille francs. Pour les accidents entraînant seulement une incapacité permanente et partielle de travail, les différences sont moins sensibles ; cependant un accident identique pourra avoir des conséquences différentes suivant l'état de santé, la vigueur, la sobriété du blessé ; et ces conséquences ne sont pas l'effet du hasard : un patron pourrait sélectionner ses ouvriers de telle sorte que le coût des accidents fût aussi faible que possible ; il lui suffirait souvent de ne pas embaucher d'alcooliques.

En résumé, nous voyons : 1° que les probabilités d'accidents dépendent assez peu des individus, surtout si on met dans des classes à part les apprentis et les vieux ouvriers, 2° que le coût des accidents est lié très étroitement à la situation de l'ouvrier blessé. Il est donc logique de fixer les primes individuelles pour chaque ouvrier ; la somme de ces primes individuelles sera la prime d'assurance payée par l'entreprise.

Primes collectives. — La méthode des primes individuelles serait certainement très logique, mais elle est inapplicable dans la pratique. En effet, les Compagnies d'assurances seraient dans l'obligation de faire

a fait intervenir la *mortalité morbide,* alors que l'on aurait dû faire intervenir uniquement la *mortalité conséquence directe de l'accident,* puisque le complément de réserve n'est destiné à jouer que si le décès provient uniquement de l'accident primitif.

pour chaque entreprise assurée des recensements minutieux qui majoreraient considérablement les frais généraux ; les chefs d'entreprise seraient astreints à aviser les assureurs de toutes les modifications apportées dans leur personnel, modifications qui peuvent être journalières : ainsi un ouvrier pour s'embaucher devrait décliner son état civil, produire ses pièces d'identité, son livret de famille et au besoin subir un examen médical, toutes choses absolument impossibles. Les chefs d'entreprises préféreraient souvent rester leurs propres assureurs que de subir de pareilles vexations [1]. D'ailleurs, si l'usine a un grand nombre d'ouvriers, il y a compensation entre les diverses catégories d'individus ; si une prime moyenne est trop faible pour les chargés de famille, elle est trop forte pour les célibataires. Malheureusement un grand nombre d'importantes usines préfèrent ne pas s'assurer, et la compensation n'a pas lieu pour les petites entreprises; malgré tout, les inconvénients des primes individuelles sont tels qu'il faut renoncer à cette méthode et recourir au système des primes *collectives*. On peut critiquer ce procédé, prétendre qu'il n'est pas équitable; mais il ne faut pas oublier que, dans le cas qui nous occupe, les théories mathématiques sont des instruments qui doivent se plier aux exigences des raisons commerciales.

On est donc amené à percevoir la prime sur la col-

[1] L'application de la méthode des primes individuelles aurait au point de vue social de graves conséquences; elle inciterait les patrons à renvoyer le plus possible d'apprentis et d'ouvriers chargés de famille, et à les remplacer par des adultes célibataires, étrangers de préférence. La loi de 1898, faite pour protéger les ouvriers, aurait ainsi pour conséquence inattendue de rendre plus misérables les travailleurs les plus intéressants.

lectivité *anonyme* des travailleurs; le nombre des ouvriers étant variable, la prime est proportionnelle au travail fourni, c'est-à-dire aux salaires payés par le patron. Dans la pratique, le patron envoie tous les trois mois à son assureur le relevé des salaires payés par lui pendant le trimestre; la prime se détermine en multipliant le total des salaires par un coefficient appelé *taux de prime* fixé par la police d'assurance; l'examen des livres de paye permet la vérification rapide des chiffres fournis par l'assuré[1].

DÉTERMINATION DES TAUX DE PRIMES

Nous avons vu, dans les chapitres relatifs à l'assurance sur la vie, que la connaissance de la loi de mortalité permettait la détermination rigoureuse des primes pures. Or la loi de mortalité résulte des statistiques relatives à la mortalité. De même la détermination mathématique des taux de prime n'est possible que s'il existe de bonnes statistiques relatives aux probabilités et aux coûts d'accidents.

La mortalité avait été étudiée en dehors de toute idée

[1] Pour les apprentis, le salaire déclaré n'est pas le salaire effectivement payé, mais un salaire conventionnel fixé par la police. En effet, quand un apprenti est victime d'un accident grave, la rente d'invalidité est basée non pas sur le salaire du blessé, mais sur le salaire le plus bas des ouvriers de la même catégorie; il est donc naturel de percevoir la prime sur le salaire qui, en cas d'accident, servirait de base à la fixation des indemnités.

d'assurance; d'ailleurs une statistique relative à la mortalité peut se faire très rapidement; nous savons qu'un simple recensement suffit à déterminer avec une approximation assez grande l'allure générale de la loi de mortalité. Il n'en est pas de même des statistiques relatives aux accidents : c'est le fonctionnement même de l'assurance qui a créé le besoin de statistiques.

Au début de l'application de la loi de 1898, on ne disposait guère que des statistiques allemandes et autrichiennes; depuis cette époque la plupart des pays ont publié des statistiques d'ordres divers : les unes présentent le nombre total d'accidents survenus, les autres le nombre total d'accidents ayant donné lieu au payement d'indemnités. En France des statistiques sont dressées annuellement, les unes par les soins des inspecteurs du travail en vertu de la loi du 12 juin 1893 sur l'hygiène et la sécurité des travailleurs, les autres par les soins du contrôle des Sociétés d'assurances contre les accidents du travail, chargé de veiller à l'application de la loi du 9 avril 1898.

Statistiques allemandes. — Les résultats sont divisés en deux parties: l'une est relative aux accidents de l'industrie, de la construction et de la marine; l'autre aux accidents de l'agriculture et de la sylviculture. On y distingue, parmi tous les accidents déclarés, ceux qui sont susceptibles de réparations pécuniaires; ces derniers sont d'ailleurs les seuls intéressants et les seuls qui puissent être utilisés. La statistique allemande, comme la statistique autrichienne, rapporte le nombre des accidents au nombre d'ouvriers complets, c'est-à-dire travaillant trois cents jours par an. Les

résultats sont réunis par groupes d'industries; les plus dangereuses au point de vue de la fréquence des accidents sont : le camionnage, les mines et carrières, les industries sidérurgiques ; celles dont les charges sont les plus grandes en raison des réparations sont les industries du bois.

La statistique allemande a montré très nettement l'accroissement de la fréquence d'accidents dans les premières années d'application de la loi. Ainsi pour les accidents agricoles le nombre de blessés pour mille ouvriers complets a été de 0,85 en 1889, de 3,85 en 1896, de 4,11 en 1901. Dans l'industrie, malgré la période déjà longue d'application de la loi, l'équilibre est à peine atteint, et le nombre des blessés pour mille ouvriers complets croît encore de 0,10 par an.

Les statistiques allemandes cherchent à déterminer l'influence de certains facteurs : circonstances locales, sexe, âge, faute du patron ou de l'ouvrier, défaut de protection, etc. C'est ainsi qu'elles ont montré que la fréquence des accidents augmente avec l'âge, avec un maximum dans l'industrie vers 60 ans, et que, dans 42 % des cas, l'accident est causé par le « risque inévitable » de travail.

Statistiques autrichiennes. — La statistique donnant les résultats de la période 1890-96 s'occupait spécialement des résultats financiers; elle donnait en outre les nombres de travailleurs complets et d'accidents indemnisés classés d'après leurs suites. La statistique de la période 1897-1901 donne des renseignements analogues à ceux de la statistique allemande au point de vue du risque, des causes et des suites.

Statistiques françaises. — En France, sous le régime de l'assurance non obligatoire, des statistiques d'accidents du travail sont dressées par les Sociétés d'assurances dans le but de fixer les taux de primes relatifs aux diverses industries. De son côté, le Ministère du Travail rassemble les renseignements qui lui sont fournis d'une part par le service de l'Inspection du travail, et d'autre part par les Sociétés d'assurances. Tous les trois mois, la Direction de l'assurance et de la prévoyance sociales publie au *Journal officiel* des statistiques par branches d'industries des accidents judiciairement réglés. Ces statistiques donnent, par sexe, le nombre de cas de mort et le nombre de cas d'invalidité permanente. Elles donnent en outre, pour les cas de mort, le nombre des conjoints, des enfants et des ascendants.

Les renseignements fournis par les statistiques ministérielles françaises sont très précis et très exacts; malheureusement ils ne peuvent servir à déterminer les probabilités d'accidents, car ils laissent dans l'ombre le nombre d'ouvriers assujettis dans chaque groupe d'industrie.

Les meilleures statistiques françaises sont certainement celles des grandes Compagnies d'assurances; chaque profession a sa statistique spéciale; en regard des accidents payés, figure le total des salaires assurés; alors que les statistiques allemandes rapportent le nombre et le coût d'accidents à 300 journées de travail, les statistiques françaises les rapportent à 1000 francs de salaires. Au fond les deux méthodes sont identiques, et pour passer de l'une à l'autre il suffit de connaître le salaire moyen de l'ouvrier complet.

Il est à souhaiter que les grandes Compagnies par-

viennent à s'entendre et mettent loyalement en commun leurs résultats statistiques; malheureusement elles ont préféré jusqu'ici tenir secrets les résultats de leur expérience. L'ignorance où étaient les Compagnies des taux exacts a poussé quelques-unes d'entre elles à accepter des affaires à des prix dérisoires : certaines ont fait faillite, beaucoup ont fait des pertes sensibles; les plus favorisées, gênées néanmoins par cette concurrence acharnée, n'ont pu réaliser les bénéfices qu'elles étaient en droit d'espérer.

Impossibilité d'avoir de bonnes statistiques. — La clientèle des Compagnies d'assurances est exclusivement composée par la moyenne et la petite industrie; n'oublions pas en effet que l'assurance est, en France, absolument libre. Or quel intérêt peut avoir une très grande entreprise à s'assurer? Une usine occupant 2 000 ouvriers, gagnant 2 000 francs chacun en moyenne, aurait à payer une prime annuelle de 120 000 francs en fixant à 3 % le taux de prime de l'assurance. Cette usine sait exactement, d'après les résultats des années précédentes, ce qu'elle paye annuellement pour ses accidents; elle ne s'assurera que si ce chiffre est supérieur à la prime proposée; mais alors la Compagnie d'assurance s'apercevra bien vite de son erreur et résiliera un contrat aussi onéreux; l'entreprise redeviendra son propre assureur.

Au contraire, un petit patron sera dans l'ignorance complète de la probabilité d'accidents relative à son risque et craindra toujours qu'un grave sinistre ne vienne, sinon le ruiner, du moins apporter pour longtemps le trouble dans ses affaires.

Dans ces conditions, peut-on appliquer à la petite industrie française les résultats fournis par l'observation de la grande industrie étrangère, dont l'outillage diffère essentiellement de celui des assurés français? Il semble préférable de renoncer, dans bien des cas, au secours des statistiques étrangères.

Les statistiques nationales présentent cependant une grave cause d'erreur : elles ne reposent pas sur un nombre suffisant d'observations, les Sociétés d'assurances n'ayant pas, comme nous l'avons dit, mis leurs documents en commun. On pourrait penser que ce défaut disparaîtra peu à peu, lorsque les observations porteront sur un plus grand nombre d'années ; il est facile de voir qu'une bonne statistique doit être faite avec des documents aussi récents que possible; en effet, de nombreuses causes modifient rapidement dans une même profession les probabilités d'accidents.

Tout d'abord les procédés de fabrication se perfectionnent, entraînant la transformation de l'outillage; les progrès du machinisme tendent à remplacer partout le travail manuel par le travail mécanique.

Les probabilités d'accidents sont encore influencées par la législation. Ainsi, les lois élaborées depuis quelques années, et qui ont pour but la protection des travailleurs, interviennent pour diminuer le nombre des accidents. L'application de ces lois a pour résultat d'interdire certaines pratiques dangereuses, de faire respecter les règles de l'hygiène; les autorités compétentes peuvent obliger les industriels à munir d'appareils protecteurs toutes les machines dangereuses, les entrepreneurs à employer des dispositifs de sûreté sur les échelles et échafaudages: elles peuvent intervenir pour faire réduire

la longueur des périodes de travail sans repos. La loi sur l'instruction obligatoire, le développement des œuvres post-scolaires, la lutte contre l'alcoolisme sont également susceptibles de diminuer les probabilités d'accidents, de même que les progrès de la chirurgie tendent à en diminuer la gravité.

Augmentation du nombre d'accidents déclarés pendant les premières années d'application des lois sur les accidents du travail. — Une autre difficulté vient s'ajouter aux précédentes. On a remarqué, dans tous les pays, que le nombre d'accidents indiqué par les statistiques et donnant lieu à l'attribution d'indemnités, augmente rapidement pendant les premières années d'application des lois sur les accidents du travail, et ce n'est qu'au bout d'une période assez longue que cet accroissement cesse et qu'un état d'équilibre est atteint.

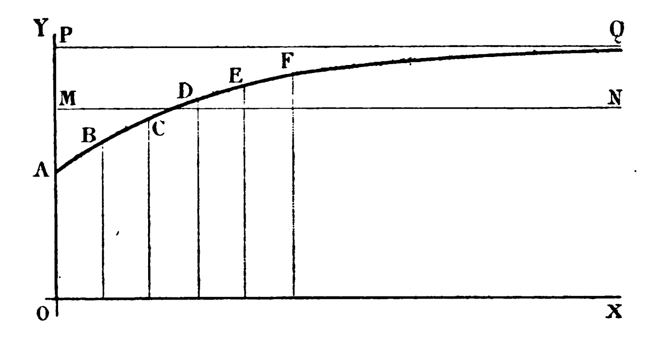
Cet accroissement, qu'aucune des causes précédentes ne saurait faire prévoir, s'explique par ce fait que le domaine d'application de la loi est pendant quelque temps méconnu des ouvriers et même des patrons. Ce n'est qu'au bout de plusieurs années que l'éducation des uns et des autres à cet égard est complète. Aussi un grand nombre d'accidents, qui auraient pu donner lieu à l'attribution d'indemnités, sont-ils passés sous silence et restent-ils ignorés, faute de déclarations.

De plus, la jurisprudence, d'abord indécise, se fixe peu à peu : tel accident qui, au début, semblait ne devoir donner lieu à aucune indemnité, sera considéré ensuite comme entraînant une réparation pécuniaire, après que les tâtonnements et les hésitations du début

auront fait place à une interprétation large et raisonnée, à une compréhension nette des principes du droit nouveau.

M. Maingie, actuaire de la Compagnie belge d'assurances générales sur la vie, a représenté graphiquement ce phénomène de la façon suivante[1] :

« On peut considérer, dit-il, que le nombre annuel



réel d'accidents rapporté à 10 000 travailleurs complets est sensiblement constant et représenté par la hauteur de la ligne PQ au-dessus de l'axe OX. Cette ligne restera horizontale tant que la prévention n'aura pas pour effet d'abaisser sensiblement le nombre des accidents...

« Dans ces conditions, on peut admettre que la ligne horizontale PQ représente la série des nombres d'accidents réellement survenus rapportés à 10 000 travailleurs complets. Mais ces accidents ne sont pas tous

[1] *De l'assurance contre les accidents du travail.* — Exposé d'une méthode de calcul des Primes. (Bruxelles, Émile Bruylant, éditeur, 1905.)

déclarés. Les premières années, la législation est mal connue, insuffisamment appliquée. L'éducation se perfectionnant, le nombre d'accidents déclarés et indemnisés devient de plus en plus grand.

« Si la hauteur de chacun des points A, B, C, D, E, F, au-dessus de l'axe OX représente les nombres, rapportés à 10000 travailleurs complets, d'accidents déclarés et indemnisés la 1re, la 2e, ... etc. année d'application de la loi, la courbe ABCDEF sera ascendante et se rapprochera d'autant plus de la ligne PQ, que l'éducation de la population ouvrière et la connaissance de la loi seront plus parfaites.

« La ligne PQ est en quelque sorte l'asymptote de la courbe des observations annuelles.

« Si l'on estimait la probabilité par la moyenne des observations annuelles A, B, C, D, E, F, la valeur en serait indiquée par la hauteur au-dessus de l'axe OX de la ligne MN.

« Or il est certain que la probabilité réelle est indiquée par la hauteur de PQ au-dessus de OX.

« Le problème à résoudre est, étant donnés les premiers éléments de la courbe ABCDEF, de déterminer la hauteur de l'horizontale PQ, de position inconnue.

« Il faut donc rechercher la limite vers laquelle tend la série des observations annuelles. Cette limite donne la valeur de la probabilité à introduire dans les formules pour leur application numérique.

« La moyenne des observations successives s'obtient aisément. Le problème sera complètement résolu par la détermination d'un coefficient plus grand que 1, dont on affectera cette moyenne pour obtenir la proba-

bilité réelle. En d'autres termes, la solution la plus simple consiste à rechercher le coefficient par lequel on multipliera la hauteur connue au-dessus de OX de la ligne MN pour obtenir celle de la ligne PQ. »

M. Maingie a cherché, au moyen des renseignements fournis par l'organisme d'assurance autrichien et publiés dans les *Amtliche Nachrichten*, à étudier pour chaque industrie la courbe telle que ABCDEF... Mais, en général, le nombre des travailleurs de chaque groupe est trop faible, et il n'est pas possible d'ajuster les courbes construites. L'ajustement devient possible si l'on considère l'ensemble des travailleurs autrichiens, et l'allure du phénomène est bien alors celle qui a été indiquée plus haut.

Augmentation du coût des accidents pendant les premières années d'application des lois sur les accidents du travail. — Nous venons de voir que les probabilités d'accidents déterminées par les statistiques étaient en réalité trop faibles en raison de la non-déclaration d'un certain nombre d'accidents.

Une cause analogue vient en outre fausser les moyennes des coûts d'accidents. Lorsque la loi sur les accidents du travail entra en vigueur, l'ouvrier blessé s'estima très heureux de toucher une indemnité à laquelle il n'aurait pas eu droit quelques années auparavant; livré à lui-même, ennemi des procès, l'ouvrier se montra conciliant dans les règlements d'accidents qui se terminaient facilement par des transactions. Plus tard, les ouvriers eurent conscience de leurs droits et apprirent quels avantages ils pouvaient tirer de la loi. Ainsi, en 1905,

le Parlement décida que les quatre premiers jours d'incapacité temporaire donneraient lieu au payement du demi-salaire si l'accident entraînait une incapacité de plus de dix jours : les statistiques postérieures à cette époque révélèrent la diminution des nombres d'accidents de 8, 9 et 10 jours et l'augmentation des nombres d'accidents de 11 ou 12 jours : l'ouvrier, désireux de toucher l'indemnité journalière pour les quatre premiers jours, ne reprenait le travail qu'au bout de 11 ou 12 jours.

Si l'ouvrier et son patron ne peuvent se concilier sur la fixation du montant de la rente, la loi les renvoie devant le tribunal de première instance : une expertise assez coûteuse est généralement ordonnée, les frais judiciaires viennent augmenter notablement le coût de l'accident. Or la loi accorde à l'ouvrier le bénéfice de l'assistance judiciaire : l'ouvrier a tout à gagner et le patron tout à perdre en engageant le procès. L'ouvrier n'a pas tardé à tirer parti de cette situation avantageuse; les dernières statistiques montrent qu'un assez grand nombre d'accidents se terminent par un procès-verbal de conciliation, fixant à 1 ou 2 % le degré d'invalidité de l'ouvrier et ordonnant le rachat en espèces de la rente minime résultant de cet accord. L'assureur, pour s'éviter les frais et les ennuis d'un procès, a préféré accorder une petite somme à un ouvrier complètement guéri des suites de l'accident.

Enfin les hommes d'affaires ont trouvé dans les accidents un vaste champ d'opération : ils promettent au blessé de lui faire obtenir une très forte indemnité s'il leur confie ses intérêts; il est certain que leur intervention, qui probablement ne profite pas aux acciden-

tés, empêche souvent les transactions et fait augmenter le coût moyen des accidents graves.

Il résulte de tout ce que nous avons dit :

1° Qu'il est très difficile de connaître les probabilités d'accidents dans une profession déterminée;

2° Que le coût moyen des accidents est très variable.

Nous ne pouvons donc pas avoir la prétention, avec des éléments aussi peu précis, de calculer rigoureusement les taux de primes. L'actuaire sera bien obligé cependant de se servir de statistiques, quelles que soient les critiques qu'on puisse leur adresser; mais il devra étudier attentivement les causes qui pourront modifier dans l'avenir les résultats obtenus par l'observation du passé et tâcher d'apporter aux statistiques les corrections nécessaires.

Toutes ces réserves étant faites, nous allons examiner maintenant les diverses méthodes employées ou proposées pour le calcul des taux de primes pures.

Méthode des Compagnies d'assurances. — Supposons que les salaires déclarés pour les ouvriers d'une profession déterminée s'élèvent à une somme S; soit A la somme des coûts d'accidents survenus à l'ensemble de ces ouvriers pendant la même période; si A et S étaient très grands et si les probabilités d'accidents étaient invariables, il est bien évident que le taux de la prime pure serait $\frac{A}{S}$. Malheureusement les observations sont trop peu nombreuses pour que A et S soient suffisamment grands. C'est cependant cette méthode qui, à cause de sa très grande simplicité, sert

le plus généralement au calcul des taux de primes pures.

Calcul de la prime commerciale en fonction de la prime pure. — Posons $\frac{A}{S} = \theta$; θ sera le taux de la prime pure : soit t le taux de la prime commerciale, P la prime commerciale à percevoir sur un total S de salaires.

La prime P devra être la somme : 1° du montant A des accidents; 2° des frais mA occasionnés par le règlement des accidents[1]; 3° des frais d'acquisition et du bénéfice éventuel nP; 4° des menus frais p occasionnés par chaque assurance et indépendants du montant de la prime :

$$P = A + mA + nP + p.$$

On peut négliger p devant les autres frais mA et nP et écrire :

$$P(1 - n) = A(1 + m).$$

D'où :

$$St = P = A \times \frac{1 + m}{1 - n},$$

$$t = \frac{A}{S} \times \frac{1 + m}{1 - n} = \theta \times \frac{1 + m}{1 - n}.$$

On obtient donc le taux de prime commerciale en multipliant le taux de prime pure par un facteur constant et facile à déterminer.

Remarque. — Les Compagnies ont une tendance

[1] Les frais généraux des Compagnies-Accidents sont beaucoup plus élevés que ceux des autres Compagnies, en raison des frais occasionnés par le règlement des sinistres.

à accorder des conditions plus favorables aux affaires importantes; cette concession ne se justifie pas suffisamment, car le taux de prime pure ne dépend pas du nombre d'ouvriers garantis, et les frais généraux sont très sensiblement proportionnels à la prime pure.

Méthode constructive de M. Maingie[1]. — M. Maingie a indiqué une méthode très intéressante pour le calcul des taux de primes pures. Nous allons exposer brièvement le principe de cette méthode.

Les ouvriers diffèrent les uns des autres par le salaire, par l'âge, par les charges de famille, etc. Groupons-les en catégories composées d'individus de situation identique; désignons par k_1, k_2, ... k_m, ces diverses catégories.

Les accidents ont des suites variables i_1, i_2, ... i_n (mort, incapacité permanente totale, incapacité permanente partielle, incapacité temporaire).

Enfin la gravité de chaque accident est plus ou moins grande.

Appelons j_1, j_2, ... j_p les différents degrés de gravité. Soit $P^{i,j,k}$ la probabilité pour un ouvrier K d'être victime dans l'année d'un accident de nature i et de gravité j. Soit $R^{i,j,k}$ le coût de l'accident, dont la probabilité est $P^{i,j,k}$. La prime pure d'assurance contre cet accident déterminé atteignant un ouvrier déterminé est évidemment : $P^{i,j,k}R^{i,j,k}$.

La prime pure d'assurance contre les accidents de tous genres, de toutes gravités, atteignant un ouvrier quelconque, s'obtiendra en donnant à i, j, k toutes

[1] *De l'assurance contre les accidents du travail* (déjà cité).

les valeurs possibles et en faisant la somme de toutes les primes élémentaires :

$$\Pi = \Sigma_k \Sigma_j \Sigma_i \ P^{i,j,k} R^{i,j,k}. \qquad (1)$$

Dans sa très remarquable étude, M. Maingie s'est surtout préoccupé de montrer que, en supposant connues les probabilités $P^{i,j,k}$, il était facile d'effectuer les sommations indiquées par la formule (1). De nombreux travaux statistiques permettent, en effet, de supprimer la variable k relative à l'individu, et de toujours considérer l'accident survenu à un individu moyen âgé par exemple de 40 ans, ayant une femme âgée de 35 ans touchant les soixante-huit centièmes[1] des indemnités accordées aux femmes par la loi, et un enfant âgé de 12 ans, ayant droit aux cent quarante-centièmes[2] de la réparation accordée à un orphelin.

La méthode de M. Maingie est parfaite au point de vue théorique : si l'on connaissait exactement les probabilités d'accidents, elle permettrait de calculer rigoureusement les taux de primes. Malheureusement ces probabilités restant inconnues, la méthode est inapplicable dans la pratique. M. Maingie, pour faire une application de son procédé, choisit l'industrie de la laine; la statistique, qui sert de base à ses calculs, porte sur l'observation de 108 835 ouvriers complets pendant un an; si l'on admet pour ces ouvriers un salaire moyen de 1 500 francs par an, ce nombre d'ouvriers correspond à un total de salaires de plus de 162 millions de francs : il n'y a pas de Compagnie

[1] Cela suppose que sur 100 ouvriers, 68 soient mariés.

[2] Cela suppose que le nombre moyen d'enfants laissés par les victimes d'accidents du travail soit de 1,40.

d'assurances qui, pour une profession déterminée, ait assuré un total de salaires aussi élevé.

Aussi les actuaires des Compagnies françaises ont-ils continué à employer la méthode que nous avons signalée plus haut, et que M. Maingie appelle *méthode déductive*. Nous allons indiquer une troisième méthode, procédant à la fois des deux méthodes précédentes.

Méthode des coûts moyens. — Nous avons vu que les Compagnies d'assurances adoptaient, en général, pour taux de prime pure le rapport $\frac{A}{S}$, A étant le coût total des accidents correspondant à un total S de salaires déclarés.

La somme A est une fonction d'un grand nombre de variables qui peuvent se grouper en deux catégories :

1° Celles qui sont relatives aux accidents eux-mêmes, en dehors de toute idée de réparation (fréquence, gravité, etc.);

2° Celles qui sont exclusivement relatives aux individus accidentés (âge, salaire, nationalité, situation de famille, etc.).

Si S était très grand, il s'établirait dans la profession considérée une sorte de compensation entre tous les ouvriers assurés; si tel accident mortel n'a presque rien coûté parce que la victime n'avait ni femme, ni enfants, ni ascendants à sa charge, tel autre, par contre, coûtera très cher, parce que la victime laissera une jeune femme et quatre enfants en bas âge; s'il y a un grand nombre d'accidents mortels, le coût moyen de ces accidents ne sera pas affecté par les circonstances

anormales qui peuvent se produire dans quelques cas particuliers. Mais, pour presque toutes les professions, S ayant une valeur peu élevée, le nombre des accidents graves est très faible, et la compensation ne se produit pas. Aux erreurs résultant de la mauvaise détermination de la probabilité, viennent s'ajouter celles qui résultent de la particularisation des victimes. Ce sont ces dernières erreurs que nous allons éliminer en substituant au coût réel A un coût fictif A'. Examinons les différents genres d'accidents.

Accidents mortels. — Supposons que dans la profession considérée la statistique révèle n_1 accidents mortels d'un coût total A_m. Le coût d'un accident mortel se compose :

1° De sommes proportionnelles au salaire (constitution de rentes, indemnités journalières);

2° De sommes indépendantes du salaire (frais médicaux et pharmaceutiques, funéraires, judiciaires).

Il est bien évident que le coût d'un accident mortel ne dépend pas de la profession de la victime. Nous pouvons donc grouper les accidents mortels de toutes les professions afin de déterminer :

1° La moyenne μ_m, pour un salaire de 1 000 francs, des indemnités proportionnelles au salaire;

2° La moyenne Π_m par accident des indemnités indépendantes du salaire.

Nous connaissons le salaire moyen s des ouvriers de la profession dont nous cherchons le taux de prime. Nous remplacerons A_m par un nombre A'_m tel que :

$$A'_m = n_1\left(\frac{s\mu_m}{1000} + \Pi_m\right).$$

Remarque. — On pourrait déterminer μ_m sans se

servir des statistiques appartenant à la Compagnie d'assurances, en employant des documents d'ordre plus général.

Ainsi le nombre moyen de conjoints et d'enfants pour cent ouvriers tués se détermine aisément au moyen des statistiques annuelles basées sur les ordonnances et jugements rendus en vertu de la loi de 1898 et publiés au *Journal officiel*.

Ce procédé constructif donnerait pour μ une valeur qui pourrait servir à contrôler celle qui serait obtenue par la méthode précédente.

Incapacité permanente totale. — Comme pour les accidents mortels, nous pouvons grouper, quelle que soit la profession, tous les accidents entraînant une incapacité permanente et totale. Nous éliminerons ainsi les différences d'âges ; sans cette précaution nous risquerions d'avoir d'assez graves erreurs, car le prix d'un franc de rente viagère varie dans de larges proportions suivant l'âge du sinistré; nous éliminerons en outre les différences provenant des frais judiciaires qui varient de 20 à 1 000 francs.

Si A_t représente le coût total des accidents de cette nature, nous remplacerons A_t par A'_t, tel que :

$$A'_t = n_2\left(\frac{s\mu_t}{1\,000} + H_t\right).$$

Incapacité permanente partielle. — Si l'on considère toutes les professions assurées, on trouve un grand nombre d'accidents entraînant une incapacité permanente et partielle. Il est donc possible de déterminer d'après la statistique de tous ces accidents :

1° L'âge moyen des victimes;

2° Le salaire moyen des ouvriers de la profession ;

3° La moyenne des frais judiciaires.

Dans le calcul du capital constitutif de la rente, on remplacera l'âge et le salaire réels de la victime par l'âge et le salaire moyens des ouvriers blessés; de même on remplacera le montant des frais judiciaires par la moyenne indiquée par l'ensemble des accidents.

Incapacité temporaire. — Les accidents entraînant seulement une incapacité temporaire de travail sont toujours très nombreux; d'ailleurs, la seule variable susceptible de correction dans ce genre d'accidents est le salaire : on peut admettre, en raison du grand nombre d'observations, que la compensation se fait d'elle-même. Il n'y a donc pas lieu de modifier le coût total des accidents entraînant une incapacité temporaire de travail.

Statistiques fictives. — On est quelquefois amené à faire des statistiques fictives; si par exemple la loi de 1898 était modifiée quant aux réparations, on serait dans l'obligation d'appliquer de nouveaux taux de primes. Dans ce cas, il suffit de calculer ce que coûterait chaque accident sous le régime de la nouvelle loi; on a ainsi de nouvelles statistiques remplaçant les anciennes.

Résiliation des contrats pour sinistres. — Une des plus grandes difficultés auxquelles se heurtent les Compagnies d'assurances contre les accidents consiste dans la résiliation des contrats ayant donné lieu à un trop grand nombre de sinistres. Beaucoup de Compagnies résilient les contrats quand le montant des accidents payés dépasse le total des primes perçues. Ce procédé donne lieu à de très graves critiques; d'abord l'assurance étant basée sur la mutualité, il est

naturel que les bénéfices réalisés sur certaines affaires soient en partie compensés par les pertes subies sur d'autres ; de plus, un accident inévitable peut frapper l'usine la mieux installée et la mieux surveillée ; en résiliant le contrat, la Compagnie renonce aux bénéfices éventuels que pourrait rapporter l'entreprise. Une Compagnie d'assurances est destinée à subir les coups du hasard qui atteignent les assurés : un contrat ne doit donc être résilié que si les résultats ne sont pas la conséquence exclusive des effets du hasard.

Comment reconnaître que les résultats donnés par un contrat ne sont pas dus uniquement au hasard? Le meilleur moyen est d'étudier la fréquence des accidents; les accidents graves sont toujours trop peu nombreux pour que leur observation puisse fournir un indice sérieux ; il semble préférable d'examiner la fréquence des accidents entraînant une incapacité temporaire.

Soit n le nombre moyen d'accidents pour un total S de salaires, n étant fourni par la statistique relative à la profession ; soit $N = n + a$ le nombre d'accidents correspondant au même total S de salaires, N étant fourni par le contrat examiné; si l'écart a est supérieur à l'écart α dont la probabilité de ne pas être dépassé est suffisamment voisine de l'unité, il n'y a aucun doute, la résiliation s'impose. Si a est inférieur à α, on pourra attendre.

Nous allons calculer α en fonction de n et de la probabilité $\Theta(t)$. Nous avons vu, au début de l'ouvrage, qu'il existait entre ces quantités la relation

$$t = \frac{\alpha}{\sqrt{2spq}},$$

p étant la probabilité de l'accident et s le nombre d'épreuves correspondant au nombre normal d'arrivées n. On a donc : $sp = n.$

D'où :

$$t = \frac{\alpha}{\sqrt{2nq}},$$

$$\alpha = t\sqrt{2nq}.$$

Or q, probabilité contraire de p, est très voisine de l'unité.

On a donc sensiblement $\alpha = t\sqrt{2n}$.

Si nous faisons $t = 1{,}50$ la valeur correspondante de la probabilité $\Theta(t)$ sera $0{,}966$, valeur très voisine de l'unité. On dresse ainsi le tableau des écarts maxima correspondants aux différents nombres probables.

Pour $n = 8$ $\alpha = 6$

. . . .

$n = 18$ $\alpha = 9$

. . . .

$n = 32$ $\alpha = 12$

. . . .

$n = 50$ $\alpha = 15$

. . . .

$n = 200$ $\alpha = 30$

Nous avons pris une probabilité $0{,}966$ très voisine de l'unité ; en choisissant des probabilités moins grandes, on a des limites d'écarts très inférieures à celles que nous venons de calculer ; chaque Compagnie adoptera une valeur de $\Theta(t)$ en rapport avec sa prudence ; dans tous les cas, ce procédé très simple

éveillera l'attention de la Compagnie : une vérification minutieuse du risque pourra faire connaître la cause de la grandeur de l'écart (modifications dans le risque, déclarations de salaires frauduleuses, etc.).

J. — ASSURANCE INDIVIDUELLE

L'assurance individuelle garantit tous les accidents, professionnels ou non. Ce genre d'assurance étant beaucoup moins important que l'assurance contre les accidents du travail, on ne peut pas déterminer les primes avec une exactitude suffisante en se servant des statistiques propres à cette branche.

La meilleure méthode consiste à diviser la prime en deux parties :

1° Prime d'assurance contre les accidents non professionnels ;

2° Prime d'assurance contre les accidents professionnels.

Accidents non professionnels. — Ces accidents étant communs à tous les assurés, on pourra les réunir en une même statistique et par suite déterminer la prime relative à ce risque avec une exactitude suffisante.

Proposons-nous de déterminer la prime d'assurance d'un capital de 1 000 francs payable en cas de mort consécutive à un accident non professionnel.

Supposons que sur 100 000 assurés, 32 soient morts

dans l'espace d'un an des suites d'accidents non professionnels; la probabilité de mort étant de $\frac{32}{100\,000}$, la prime pure sera, pour un capital de 1 000 francs:

$$\Pi = 1\,000 \times \frac{32}{100\,000} = 0 \text{ fr. } 32.$$

Accidents professionnels. — Pour calculer les primes pures relatives aux accidents professionnels, on pourra généralement se servir des résultats fournis par l'assurance des accidents du travail. Considérons, par exemple, les accidents mortels. Soit a_m le coût moyen d'un accident du travail mortel correspondant au salaire moyen s; soit p la prime pure d'assurance contre les accidents mortels survenant dans le travail à un ouvrier gagnant le salaire moyen s. Si la Compagnie doit payer une somme de 1 000 francs, les probabilités d'accidents étant les mêmes, il est bien évident que les primes seront proportionnelles aux sommes versées aux ayants droit des victimes. Si Π' est la prime d'assurance d'un capital de 1 000 francs, on aura donc :

$$\frac{\Pi'}{p} = \frac{1\,000}{a_m}.$$

D'où :
$$\Pi' = \frac{p \times 1\,000}{a_m}.$$

K. — ASSURANCES DES CHOSES

Ces assurances ont pour but de garantir aux personnes intéressées la valeur de certaines choses contre les risques de perte; telles sont : l'assurance contre l'incendie, l'assurance de la mortalité du bétail, des chevaux, voitures, automobiles, chevaux de courses, bris de glaces; telles sont encore les assurances maritimes contre la perte des navires ou de leurs cargaisons.

Il n'existe pas de théorie mathématique de ces diverses assurances : les primes sont généralement calculées d'une manière empirique; lorsque les résultats financiers sont mauvais, on procède à un relèvement des tarifs.

Il serait d'ailleurs très aisé d'établir une théorie mathématique de ces assurances. Soit p_n la probabilité d'un accident survenant pendant le cours d'une année et produisant une perte de n centièmes de la valeur assurée. La prime annuelle d'assurance d'un objet de valeur V sera :

$$\Sigma_0^{100} p_n \frac{V \times n}{100}.$$

La difficulté consiste uniquement dans la détermination des probabilités p_n; comme toujours, il est nécessaire d'avoir de bonnes statistiques basées sur un grand nombre d'observations.

L. — ASSURANCES DE RESPONSABILITÉ CIVILE

Les Compagnies d'assurances garantissent la responsabilité civile des propriétaires ou locataires d'immeubles dans le cas où ils mettraient le feu aux immeubles voisins ; elles garantissent la responsabilité civile des propriétaires de chevaux, voitures, automobiles, ascenseurs, etc., celle des chasseurs, des commerçants et des industriels dans le cas où leurs préposés causeraient des dommages à des tiers.

Jusqu'ici toutes les Compagnies ont limité leur intervention à une somme *maxima* fixée par la police : si la responsabilité civile d'un assuré est couverte jusqu'à concurrence de 20 000 francs, la Compagnie n'aura jamais à débourser plus de 20 000 francs ; si un accident dépasse cette somme, l'assuré sera son propre assureur pour le surplus.

Soit p_x la probabilité qu'un accident coûtant x surviendra pendant la durée d'une année. Si la Compagnie couvrait sans limite la responsabilité civile de l'assuré, la prime annuelle totale serait :

$$\int_0^\infty p_x \times x.$$

Si G est le maximum de garantie stipulé dans la police, la prime annuelle sera :

$$\int_0^G p_x \times x + G\Sigma_G^\infty p_x.$$

Supplément de garantie. — Il arrive fréquemment qu'une personne assurée jusqu'à concurrence d'une somme G désire porter à G′ le montant de sa garantie; on voit aisément que la prime relative à ce supplément de garantie sera :

$$\int_0^{G'} p_x \times x + G'\Sigma_{G'}^{\infty} p_x - \int_0^{G} p_x \times x - G\Sigma_{G}^{\infty} p_x.$$

C'est-à-dire :

$$\int_G^{G'} p_x x + G'\Sigma_{G'}^{\infty} p_x - G\Sigma_{G}^{\infty} p_x.$$

Dans la pratique, les Compagnies déterminent les primes d'une manière empirique en se basant sur les résultats financiers.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

(Les renvois à cet index sont indiqués dans le corps du volume par le nom de l'auteur en capitales.)

— *Bulletin de l'Institut des actuaires français de 1890 à 1907*, Dulac.

— *Compte rendu du 3e Congrès international d'actuaires (Paris, 1900)*, Dulac.

— *Formules et barèmes des primes de cotisations minima des opérations d'assurances sur la vie*, Berger-Levrault (1907).

— *Lois du 18 juin 1850 et du 20 juillet 1886.* (Caisse nationale des retraites.)

— *Loi du 1er avril 1898.* (Sociétés de secours mutuels.)

— *Loi du 9 avril 1898 modifiée.* (Accidents du travail.)

— *Loi du 17 mars 1905 et décrets.* (Sociétés d'assurances sur la vie.)

— *Lois du 11 juillet 1868, du 30 novembre 1894, du 17 juillet 1897.* (Caisse nationale d'assurance en cas de décès.)

— *Rapports sur l'application de la loi du 9 avril 1898*, Berger-Levrault.

— *Recueil de documents sur les accidents du travail : lois, règlements, circulaires*, Berger-Levrault.

— *Tables de mortalité du Comité des Compagnies françaises d'assurances sur la Vie (1900)*, Gauthier-Villars.

— *Tarifs des Compagnies françaises d'assurances sur la Vie.*

— *Tarifs de la Caisse nationale d'assurance en cas de décès et de la Caisse nationale des retraites.*

AGNEL ET DE CORNY. *Manuel général des assurances*, Marchal et Billard (1900).

BARRIOL. *Traité des opérations financières*, E. S.

BELLOM (M.). *Les lois d'assurance ouvrière à l'étranger*, Rousseau (1892 à 1906).

Bertrand (J.). *Calcul des probabilités,* Gauthier-Villars.

Béziat d'Audibert. *Théorie élémentaire des assurances sur la vie,* Dulac.

Brasilier. *Théorie mathématique des placements et emprunts à long terme,* Masson (1892).

Cottin (F.). *Barème, établi d'après les tarifs de la Caisse des Retraites,* Dulac (1905).

Corny (de). (Voir Agnel.)

Courcy (A. de). *Précis de l'assurance sur la vie,* Dulac.

Laffitte (P. de). *Essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels,* Gauthier-Villars (2e édition, 1892).

Gauss. *Mémoires traduit par J. Bertrand.*

Laplace. *Théorie analytique des probabilités* (1812)

Laurent (H.). 1. *Théorie des jeux de hasard,* Encyclopédie Léauté.

— 2. *Statistique mathématique,* E. S.

Maingie. *De l'assurance contre les accidents du travail,* Émile Bruylant, Bruxelles (1905).

Marie (L.). *Théorie mathématique et pratique des opérations financières,* Gauthier-Villars et Fils (1890).

Poterin du Motel. 1. *Tables de mortalité par âge à l'entrée (Thèse),* Bulletin de l'Institut des actuaires, no 14.

— 2. *Théorie des assurances sur la Vie,* Warnier et Dulac (1899).

Poussin (R.). 1. *Application des procédés graphiques aux calculs d'assurances,* Dulac (1904).

— 2. *Traité élémentaire des assurances sur la Vie,* Dulac (1907).

Quiquet (A.). 1. *Tables de survie et de mortalité (Aperçu historique),* Dulac (1894).

— 2. *Tables de survie. — Leur représentation algébrique,* Dulac (1894).

Razous. *Étude sur la mortalité et la morbidité des professions dangereuses,* Defond (1904).

Schaertlin. *Contribution à la théorie mathématique de l'assurance contre l'invalidité,* Staempfli et Cie, Berne (1907).

Weber. *Étude sur les tables de mortalité d'invalides et sur les tables d'invalidité,* Warnier (1897).

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

A. — Rappel des principes fondamentaux du calcul des probabilités.

B. — L'assurance considérée comme jeu de hasard.

LIVRE I

ASSURANCES SUR LA VIE

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

A. — Définitions.

B. — Statistiques. — Sélection.

C. — Tables de survie.

D. — Équations de survie.

E. — Principales tables de survie.

CHAPITRE II

CALCUL DES PRIMES PURES

F. — Annuités viagères.

G. — Assurances en cas de vie.

H. — Assurances en cas de décès.

J. — Combinaisons diverses.

CHAPITRE III

DES CONTRATS

K. — Tarifs.

CHAPITRE IV

DE QUELQUES ORGANISMES PARTICULIERS D'ASSURANCES SUR LA VIE

LIVRE II

ASSURANCES DIVERSES

CHAPITRE I

ASSURANCES CONTRE LA MORBIDITÉ

CHAPITRE II

ASSURANCE CONTRE L'INVALIDITÉ

CHAPITRE III

ASSURANCES CONTRE LES ACCIDENTS

OCTAVE DOIN, ÉDITEUR, 8, PLACE DE L'ODÉON, PARIS

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

Nous avons entrepris la publication, sous la direction générale de son fondateur, le Dr Toulouse, Directeur à l'École des Hautes-Études, d'une ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE de langue française dont on mesurera l'importance à ce fait qu'elle est divisée en 40 sections ou Bibliothèques et qu'elle comprendra environ 1000 volumes. Elle se propose de rivaliser avec les plus grandes encyclopédies étrangères et même de les dépasser, tout à la fois par le caractère nettement scientifique et la clarté de ses exposés, par l'ordre logique de ses divisions et par son unité, enfin par ses vastes dimensions et sa forme pratique.

I

PLAN GÉNÉRAL DE L'ENCYCLOPÉDIE

Mode de publication. — L'*Encyclopédie* se composera de monographies scientifiques, classées méthodiquement et formant dans leur enchaînement un exposé de toute la science. Organisée sur un plan systématique, cette Encyclopédie, tout en évitant les inconvénients des Traités, — massifs, d'un prix global élevé, difficiles à consulter, — et les inconvénients des Dictionnaires, — où les articles scindés irrationnellement, simples chapitres alphabétiques, sont toujours nécessairement incomplets, — réunira les avantages des uns et des autres.

Du Traité, l'*Encyclopédie* gardera la supériorité que possède

un ensemble complet, bien divisé et fournissant sur chaque science tous les enseignements et tous les renseignements qu'on en réclame. Du Dictionnaire, l'*Encyclopédie* gardera les facilités de recherches par le moyen d'une table générale, l'*Index de l'Encyclopédie,* qui paraîtra dès la publication d'un certain nombre de volumes et sera réimprimé périodiquement. L'*Index* renverra le lecteur aux différents volumes et aux pages où se trouvent traités les divers points d'une question.

Les éditions successives de chaque volume permettront de suivre toujours de près les progrès de la science. Et c'est par là que s'affirme la supériorité de ce mode de publication sur tout autre. Alors que, sous sa masse compacte, un traité, un dictionnaire ne peut être réédité et renouvelé que dans sa totalité et qu'à d'assez longs intervalles, inconvénients graves qu'atténuent mal des suppléments et des appendices, l'*Encyclopédie scientifique,* au contraire, pourra toujours rajeunir les parties qui ne seraient plus au courant des derniers travaux importants. Il est évident, par exemple, que si des livres d'algèbre ou d'acoustique physique peuvent garder leur valeur pendant de nombreuses années, les ouvrages exposant les sciences en formation, comme la chimie physique, la psychologie ou les technologies industrielles, doivent nécessairement être remaniés à des intervalles plus courts.

Le lecteur appréciera la souplesse de publication de cette *Encyclopédie,* toujours vivante, qui s'élargira au fur et à mesure des besoins dans le large cadre tracé dès le début, mais qui constituera toujours, dans son ensemble, un traité complet de la Science, dans chacune de ses sections un traité complet d'une science, et dans chacun de ses livres une monographie complète. Il pourra ainsi n'acheter que telle ou telle section de l'*Encyclopédie,* sûr de n'avoir pas des parties dépareillées d'un tout.

L'*Encyclopédie* demandera plusieurs années pour être achevée ; car pour avoir des expositions bien faites, elle a pris ses collaborateurs plutôt parmi les savants que parmi les professionnels de la rédaction scientifique que l'on retrouve généralement dans les œuvres similaires. Or les savants écrivent peu et lentement : et il est préférable de laisser temporairement sans attribution certains ouvrages plutôt que de les confier à des auteurs insuffisants. Mais cette lenteur et ces vides ne présenteront pas d'in-

convénients, puisque chaque livre est une œuvre indépendante et que tous les volumes publiés sont à tout moment réunis par l'*Index de l'Encyclopédie*. On peut donc encore considérer l'Encyclopédie comme une librairie, où les livres soigneusement choisis, au lieu de représenter le hasard d'une production individuelle, obéiraient à un plan arrêté d'avance, de manière qu'il n'y ait ni lacune dans les parties ingrates, ni double emploi dans les parties très cultivées.

Caractère scientifique des ouvrages. — Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes : les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent incompréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années ; et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.

L'*Encyclopédie scientifique* a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions ; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord faite avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle représente, et sa devise pourrait être : *Par les savants, pour les savants*. Quelques-uns de ces livres seront même, par leur caractère didactique, destinés à devenir des ouvrages classiques et à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, toutes les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section, — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours le sens des mots spéciaux.

II

ORGANISATION SCIENTIFIQUE

Par son organisation scientifique, l'*Encyclopédie* paraît devoir offrir aux lecteurs les meilleures garanties de compétence. Elle est divisée en Sections ou Bibliothèques, à la tête desquelles sont placés des savants professionnels spécialisés dans chaque ordre de sciences et en pleine force de production, qui, d'accord avec le Directeur général, établissent les divisions des matières, choisissent les collaborateurs et acceptent les manuscrits. Le même esprit se manifestera partout : éclectisme et respect de toutes les opinions logiques, subordination des théories aux données de l'expérience, soumission à une discipline rationnelle stricte ainsi qu'aux règles d'une exposition méthodique et claire. De la sorte, le lecteur, qui aura été intéressé par les ouvrages d'une section dont il sera l'abonné régulier, sera amené à consulter avec confiance les livres des autres sections dont il aura besoin, puisqu'il sera assuré de trouver partout la même pensée et les mêmes garanties. Actuellement, en effet, il est, hors de sa spécialité, sans moyen pratique de juger de la compétence réelle des auteurs.

Pour mieux apprécier les tendances variées du travail scientifique adapté à des fins spéciales, l'*Encyclopédie* a sollicité, pour la direction de chaque Bibliothèque, le concours d'un savant placé dans le centre même des études du ressort. Elle a pu ainsi réunir des représentants des principaux Corps savants, Établissements d'enseignement et de recherches de langue française :

Institut.
Académie de Médecine.

Collège de France.
Muséum d'Histoire naturelle.
École des Hautes-Études.
Sorbonne et École normale.
Facultés des Sciences.
Facultés des Lettres.
Facultés de Médecine.
Instituts Pasteur.
École des Ponts et Chaussées.
École des Mines.
École Polytechnique.
Conservatoire des Arts et Métiers.
École d'Anthropologie.
Institut National agronomique.
École vétérinaire d'Alfort.
École supérieure d'Électricité.
École de Chimie industrielle de Lyon.
École des Beaux-Arts.
École des Sciences politiques.

Observatoire de Paris.
Hôpitaux de Paris.

III

BUT DE L'ENCYCLOPÉDIE

Au XVIIIe siècle, « l'Encyclopédie » a marqué un magnifique mouvement de la pensée vers la critique rationnelle. A cette époque, une telle manifestation devait avoir un caractère philosophique. Aujourd'hui, l'heure est venue de renouveler ce grand effort de critique, mais dans une direction strictement scientifique; c'est là le but de la nouvelle *Encyclopédie.*

Ainsi la science pourra lutter avec la littérature pour la direction des esprits cultivés, qui, au sortir des écoles, ne demandent guère de conseils qu'aux œuvres d'imagination et à des encyclopédies où la science a une place restreinte, tout à fait hors de proportion avec son importance. Le moment est favorable à cette tentative ; car les nouvelles générations sont plus instruites dans l'ordre scientifique que les précédentes. D'autre part la science est devenue, par sa complexité et par les corrélations de ses parties, une matière qu'il n'est plus possible d'exposer sans la collaboration de tous les spécialistes, unis là comme le sont les producteurs dans tous les départements de l'activité économique contemporaine.

A un autre point de vue, l'*Encyclopédie,* embrassant toutes les manifestations scientifiques, servira comme tout inventaire à mettre au jour les lacunes, les champs encore en friche ou abandonnés, — ce qui expliquera la lenteur avec laquelle certaines sections se développeront, — et suscitera peut-être les travaux nécessaires. Si ce résultat est atteint, elle sera fière d'y avoir contribué.

Elle apporte en outre une classification des sciences et, par ses divisions, une tentative de mesure, une limitation de chaque domaine. Dans son ensemble, elle cherchera à refléter exactement le prodigieux effort scientifique du commencement de ce siècle et un moment de sa pensée, en sorte que dans l'avenir elle reste le document principal où l'on puisse retrouver et consulter le témoignage de cette époque intellectuelle.

On peut voir aisément que l'*Encyclopédie* ainsi conçue, ainsi réalisée, aura sa place dans toutes les bibliothèques publiques, universitaires et scolaires, dans les laboratoires, entre les mains

des savants, des industriels et de tous les hommes instruits qui veulent se tenir au courant des progrès, dans la partie qu'ils cultivent eux-mêmes ou dans tout le domaine scientifique. Elle fera jurisprudence, ce qui lui dicte le devoir d'impartialité qu'elle aura à remplir.

Il n'est plus possible de vivre dans la société moderne en ignorant les diverses formes de cette activité intellectuelle qui révolutionne les conditions de la vie ; et l'interdépendance de la science ne permet plus aux savants de rester cantonnés, spécialisés dans un étroit domaine. Il leur faut, — et cela leur est souvent difficile, — se mettre au courant des recherches voisines. A tous, l'*Encyclopédie* offre un instrument unique dont la portée scientifique et sociale ne peut échapper à personne.

IV

CLASSIFICATION DES MATIÈRES SCIENTIFIQUES

La division de l'*Encyclopédie* en Bibliothèques a rendu nécessaire l'adoption d'une classification des sciences, où se manifeste nécessairement un certain arbitraire, étant donné que les sciences se distinguent beaucoup moins par les différences de leurs objets que par les divergences des aperçus et des habitudes de notre esprit. Il se produit en pratique des interpénétrations réciproques entre leurs domaines, en sorte que, si l'on donnait à chacun l'étendue à laquelle il peut se croire en droit de prétendre, il envahirait tous les territoires voisins ; une limitation assez stricte est nécessitée par le fait même de la juxtaposition de plusieurs sciences.

Le plan choisi, sans viser à constituer une synthèse philosophique des sciences, qui ne pourrait être que subjective, a tendu pourtant à échapper dans la mesure du possible aux habitudes traditionnelles d'esprit, particulièrement à la routine didactique, et à s'inspirer de principes rationnels.

Il y a deux grandes divisions dans le plan général de l'*Encyclopédie :* d'un côté les sciences pures, et, de l'autre, toutes les technologies qui correspondent à ces sciences dans la sphère des applications. A part et au début, une Bibliothèque d'introduc-

tion générale est consacrée à la philosophie des sciences (histoire des idées directrices, logique et méthodologie).

Les sciences pures et appliquées présentent en outre une division générale en sciences du monde inorganique et en sciences biologiques. Dans ces deux grandes catégories, l'ordre est celui de particularité croissante, qui marche parallèlement à une rigueur décroissante. Dans les sciences biologiques pures enfin, un groupe de sciences s'est trouvé mis à part, en tant qu'elles s'occupent moins de dégager des lois générales et abstraites que de fournir des monographies d'êtres concrets, depuis la paléontologie jusqu'à l'anthropologie et l'ethnographie.

Étant donnés les principes rationnels qui ont dirigé cette classification, il n'y a pas lieu de s'étonner de voir apparaître des groupements relativement nouveaux, une biologie générale, — une physiologie et une pathologie végétales, distinctes aussi bien de la botanique que de l'agriculture, — une chimie physique, etc.

En revanche, des groupements hétérogènes se disloquent pour que leurs parties puissent prendre place dans les disciplines auxquelles elles doivent revenir. La géographie, par exemple, retourne à la géologie, et il y a des géographies botanique, zoologique, anthropologique, économique, qui sont étudiées dans la botanique, la zoologie, l'anthropologie, les sciences économiques.

Les sciences médicales, immense juxtaposition de tendances très diverses, unies par une tradition utilitaire, se désagrègent en des sciences ou des techniques précises ; la pathologie, science de lois, se distingue de la thérapeutique ou de l'hygiène, qui ne sont que les applications des données générales fournies par les sciences pures, et à ce titre mises à leur place rationnelle.

Enfin, il a paru bon de renoncer à l'anthropocentrisme qui exigeait une physiologie humaine, une anatomie humaine, une embryologie humaine, une psychologie humaine. L'homme est intégré dans la série animale dont il est un aboutissant. Et ainsi, son organisation, ses fonctions, son développement s'éclairent de toute l'évolution antérieure et préparent l'étude des formes plus complexes des groupements organiques qui sont offerts par l'étude des sociétés.

On peut voir que, malgré la prédominance de la préoccupation pratique dans ce classement des Bibliothèques de l'*Encyclopédie scientifique,* le souci de situer rationnellement les sciences dans leurs rapports réciproques n'a pas été négligé. Enfin il est à peine besoin d'ajouter que cet ordre n'implique nullement une hiérarchie, ni dans l'importance ni dans les difficultés des diverses sciences. Certaines, qui sont placées dans la technologie, sont d'une complexité extrême, et leurs recherches peuvent figurer parmi les plus ardues.

Prix de la publication. — Les volumes, illustrés pour la plupart, seront publiés dans le format in-18 jésus et cartonnés. De dimensions commodes, ils auront 400 pages environ, ce qui représente une matière suffisante pour une monographie ayant un objet défini et important, établie du reste selon l'économie du projet qui saura éviter l'émiettement des sujets d'exposition. Le prix étant fixé uniformément à 5 francs, c'est un réel progrès dans les conditions de publication des ouvrages scientifiques, qui, dans certaines spécialités, coûtent encore si cher.

TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

DIRECTEUR : Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : H. PIÉRON, agrégé de l'Université.

	DIRECTEURS DES BIBLIOTHÈQUES :
1. *Philosophie des Sciences.*	P. PAINLEVÉ, de l'Institut, professeur à la Sorbonne.

I. SCIENCES PURES

A. Sciences mathématiques :

2. *Mathématiques* . . .	J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers.
3. *Mécanique*	J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers.

B. Sciences inorganiques :

4. *Physique.*	A. LEDUC, professeur adjoint de physique à la Sorbonne.
5. *Chimie physique.* . .	J. PERRIN, chargé de cours à la Sorbonne.
6. *Chimie*	A. PICTET, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.
7. *Astronomie et Physique céleste.*	J. MASCART, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.
8. *Météorologie*	J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
9. *Minéralogie et Pétrographie*	A. LACROIX, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
10. *Géologie*	M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
11. *Océanographie physique.*	J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.

C. Sciences biologiques normatives :

12. *Biologie*	A. *Biologie générale*.	G. Loisel, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.
	B. *Océanographie biologique*.	J. Richard, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
13. *Physique biologique*. .		A. Imbert, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier.
14. *Chimie biologique* . .		G. Bertrand, chargé de cours à la Sorbonne.
15. *Physiologie et Pathologie végétales* . . .		L. Mangin, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
16. *Physiologie*.		J.-P. Langlois, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
17. *Psychologie*.		E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
18. *Sociologie*		G. Richard, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

19. *Microbiologie et Parasitologie*		A. Calmette, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
20. *Pathologie*.	A. *Pathol. générale* . .	A. Charrin, professeur au Collège de France médecin des Hôpitaux de Paris.
	B. *Pathologie médicale*.	M. Klippel, médecin des Hôpitaux de Paris
	C. *Neurologie*.	E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
	D. *Path. chirurgicale*.	L. Picqué, chirurgien des Hôpitaux de Paris.

D. Sciences biologiques descriptives :

21. *Paléontologie*		M. Boule, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
22. *Botanique*.	A. *Généralités et phanérogames*.	H. Lecomte, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
	B. *Cryptogames*. . .	L. Mangin, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

II. Sciences appliquées

A. Sciences mathématiques :

B. Sciences inorganiques :

C. Sciences biologiques :